BASISBOEK WISKUNDE

Jan van de Craats en Rob Bosch

Tweede editie

PEARSON
Education

ISBN: 978-90-430-1673-5
NUR: 123
Trefw: wiskunde, wiskundeonderwijs

Dit is een uitgave van Pearson Education Benelux bv,
Postbus 75598, 1070 AN Amsterdam
Website: www.pearsoneducation.nl – e-mail: amsterdam@pearson.com

Illustraties en LaTeX-opmaak: Jan van de Craats
Omslag: Inkahootz, Amsterdam

Prof. dr. J. van de Craats is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit, dr. R. Bosch is universitair hoofddocent wiskunde aan de Nederlandse Defensie Academie.

Dit boek is gedrukt op een papiersoort die niet met chloorhoudende chemicaliën is gebleekt. Hierdoor is de productie van dit boek minder belastend voor het milieu.

Leeswijzer

Dit is een oefenboek. Elk hoofdstuk begint op de linkerbladzijde met opgaven. Je kunt er direct mee aan de slag, want de eerste opgaven zijn altijd gemakkelijk. Geleidelijk worden ze moeilijker. Zodra je een opgave gemaakt hebt, kun je je antwoord achterin controleren.

Op de rechterbladzijden staat, heel beknopt, de theorie die je nodig hebt om de opgaven links te kunnen maken. Je kunt daar naar behoefte gebruik van maken. Kom je termen of begrippen tegen die daar niet verklaard worden, dan kun je via het trefwoordenregister dat achterin het boek staat, de plaats vinden waar die uitleg wél staat.

Belangrijke formules, definities en stellingen zijn op de rechterbladzijden in de kleur blauw gedrukt. De meeste ervan vind je ook weer terug in het formuleoverzicht op bladzijde **??** en verder.

In dit boek werken we met een decimale punt, en niet met een decimale komma, in overeenstemming met wat thans algemeen gebruikelijk is in de internationale wetenschappelijke en technische literatuur.

Het Griekse alfabet

α	A	alfa	ι	I	jota	ρ	P	rho
β	B	bèta	κ	K	kappa	σ	Σ	sigma
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	τ	T	tau
δ	Δ	delta	μ	M	mu	υ	Υ	upsilon
ϵ	E	epsilon	ν	N	nu	φ	Φ	phi
ζ	Z	zèta	ξ	Ξ	xi	χ	X	chi
η	H	èta	o	O	omicron	ψ	Ψ	psi
ϑ	Θ	thèta	π	Π	pi	ω	Ω	omega

Inhoudsopgave

Dankbetuiging

Veel lezers en gebruikers hebben in 2005 commentaar gegeven op voorlopige internetversies van dit boek en daarbij onduidelijkheden en fouten gesignaleerd. Met nadruk willen we in dit verband Frank Heierman bedanken, die de gehele tekst nauwkeurig heeft doorgelezen en tal van nuttige suggesties voor verbeteringen heeft gedaan. Daarnaast zijn we ook Henk Pfaltzgraff, Hans De Prez, Erica Mulder, Rinse Poortinga, Jaap de Jonge, Jantine Bloemhof, Wouter Berkelmans en Pia Pfluger erkentelijk voor hun commentaar. Chris Zaal, André Heck en Wybo Dekker hebben ons met raad en daad bijgestaan. Rosa Garcia Lopez en Eveline Korving van Pearson Education Benelux danken we voor de plezierige en stimulerende samenwerking.

Sinds enige jaren is Marc Appels onze uitgever bij Pearson. Het is een groot genoegen met hem samen te werken. Ook de verdere contacten met directie en medewerkers van Pearson verlopen altijd buitengewoon plezierig, efficiënt en professioneel. Namen noemen brengt het risico met zich mee dat we stille werkers vergeten. Daarom bij deze een collectief dankwoord voor allemaal!

De auteurs

Voorwoord

Dit boek bevat alle basiswiskunde die nodig is als ingangsniveau voor een universitaire of hogeschoolstudie op het gebied van de bètavakken, informatica, economie en verwante studierichtingen. Voor bètastudies zijn alle behandelde onderwerpen van belang, voor informatica en economische richtingen kunnen sommige stukken uit de hoofdstukken 17 (goniometrie), 22 (integratietechnieken) en 23 (toepassingen) terzijde gelaten worden. Met basiswiskunde bedoelen we algebra, getallenrijen, vergelijkingen, meetkunde, functies en calculus (dat wil zeggen differentiaal- en integraalrekening). Kansrekening en statistiek – aparte wiskundevakken met een eigen invalshoek – behandelen we niet.

In de hier gekozen didactische opzet staat oefenen centraal. Net als bij iedere vaardigheid, of het nu om voetballen, pianospelen of het leren van een vreemde taal gaat, is er ook maar één manier om wiskunde onder de knie te krijgen: veel oefenen. Bij voetballen moet je trainen, bij pianospelen studeren en bij het leren van een vreemde taal woordjes leren. Zonder basistechniek kom je nergens; bij wiskunde is het niet anders.

Waarom wiskunde leren? Natuurlijk gaat het de meeste gebruikers uiteindelijk om toepassingen in hun vak. Maar daarbij kun je wiskunde als taal en als instrument niet missen. Wie bijvoorbeeld een studieboek op het gebied van de exacte vakken openslaat, ziet vaak een stortvloed aan formules. Formules die wetmatigheden in het vak uitdrukken die met behulp van wiskundige technieken afgeleid zijn. Via wiskundige bewerkingen worden ze met andere formules gecombineerd om weer nieuwe wetmatigheden op het spoor te komen. Die manipulaties omvatten gewone algebraïsche omvormingen, maar ook het toepassen van logaritmen, exponentiële functies, goniometrie, differentiëren, integreren en nog veel meer. Dat zijn wiskundige technieken die de gebruiker moet leren hanteren. Het invullen van getalswaarden in formules om in een concreet geval een numeriek eindresultaat te verkrijgen, is daarbij slechts bijzaak; waar het om gaat, zijn de ideeën die erachter zitten, de wegen naar nieuwe formules en de nieuwe inzichten die je daardoor verwerft.

Het hoofddoel van wiskundeonderwijs dat voorbereidt op het hoger onderwijs moet dan ook het aanleren van die universele wiskundige vaardigheden zijn. Universeel, omdat dezelfde wiskundige technieken in de meest uiteenlopende vakgebieden toegepast worden. Formulevaardigheid verwerven, daar draait het vooral om. En vaardigheid in het omgaan met functies en hun grafieken. Gecijferdheid, het handig kunnen rekenen en het vlot kunnen werken met getallen, is bij dit alles slechts een klein onderdeel. De rol van een rekenmachine (al dan niet grafisch) is in dit boek dan ook uitermate bescheiden; we zullen er nauwelijks gebruik van maken. Waar zo'n apparaat bij het maken van de opgaven noodzakelijk is, hebben we dat expliciet aangegeven.

Voor wie is dit boek bedoeld?

Om te beginnen voor alle scholieren en studenten die zich bij wiskunde onzeker voelen omdat er gaten in hun basiskennis zitten. Zij kunnen hun wiskundige vaardigheden hiermee bijspijkeren. Maar het kan ook gebruikt worden als leerboek of als cursusboek. Door de doordachte, stapsgewijze opbouw van de stof met korte toelichtingen is het geschikt voor zelfstudie. Toch zal het altijd moeilijk blijven een vak als wiskunde helemaal door zelfstudie te leren: de waarde van een goede leraar als gids door de lastige materie kan moeilijk overschat worden.

Hoe zit dit boek in elkaar?

Alle hoofdstukken (op de laatste drie na) zijn op dezelfde manier opgebouwd: op de linkerbladzijden opgaven, op de rechterbladzijden de bijbehorende uitleg. De gebruiker wordt uitdrukkelijk uitgenodigd om eerst aan de opgaven links te beginnen. Wie vastloopt, onbekende begrippen of notaties tegenkomt of bepaalde details niet helemaal goed meer weet, raadpleegt de tekst rechts en indien nodig het trefwoordenregister. De opgaven zijn zorgvuldig uitgekozen: eenvoudig beginnen met veel soortgelijke sommen om de vaardigheden goed te oefenen. Met heel kleine stapjes wordt de moeilijkheid geleidelijk opgevoerd. Wie alle opgaven van een hoofdstuk gemaakt heeft, kan er zeker van zijn dat hij of zij de stof begrijpt en beheerst.

Bij onze uitleg gaan we niet op alle wiskundige finesses in. Wie meer over de wiskundige achtergronden wil weten, vindt achterin drie hoofdstukken zonder opgaven met verdere verklaringen. Ze staan niet voor niets achterin: alleen wie al behoorlijk wiskundig bedreven is, zal ze kunnen waarderen. En de lezer die er niet aan toe komt, heeft geen probleem: wat voor de toepassingen nodig is, staat in de eerdere hoofdstukken. Een formuleoverzicht, een trefwoordenregister en een volledige antwoordenlijst completeren het boek.

Bij de tweede editie

Wanneer een boek binnen vier jaar acht drukken bereikt, kun je gerust van een succes spreken. Dat stemt tot dankbaarheid. Van heel wat gebruikers hebben we positieve reacties ontvangen, soms met suggesties voor verbeteringen. Gesignaleerde fouten in de antwoordenlijst konden we telkens al in de volgende druk corrigeren. De eerste auteur houdt een erratalijst bij op zijn homepage (gemakkelijk te vinden via Google). Daarnaast konden we tussentijds enige kleine verbeteringen in de tekst doorvoeren. Zo ontstond een steeds beter product.

Maar volmaakt was het niet: gebruikers meldden ons dat we sommige onderwerpen te summier behandeld hadden en dat er in enkele gevallen ook behoefte was aan meer opgaven op elementair niveau. Een apart probleem was het gebrek aan rekenvaardigheid onder studenten: de vrucht van falend rekenonderwijs op de basisschool. Om dit te repareren, hebben we het *Basisboek rekenen* geschreven. Wie al in de eerste hoofdstukken van *Basisboek wiskunde* vastloopt op rekenproblemen, zou dat boek eerst door moeten werken, liefst van a tot z.

Met deze tweede editie van *Basisboek wiskunde* zijn we in de gelegenheid enige meer ingrijpende wijzigingen en uitbreidingen aan te brengen. Aan de opzet en de structuur van onze succesformule veranderen we echter niets: heldere opbouw, opgaven links, uitleg en theorie rechts. Er zijn ook geen nieuwe onderwerpen toegevoegd; de hoofdstukindeling is ongewijzigd gebleven.

De belangrijkste wijzigingen

De belangrijkste veranderingen zijn de volgende. De algebra-hoofdstukken 4 en 5 zijn beter gestructureerd. Hoofdstuk 8 (rijen en limieten) is uitgebreid. In de meetkunde-hoofdstukken 12 tot en met 15 zijn tekstverbeteringen aangebracht en enige minder geslaagde opgaven verwijderd.

In hoofdstuk 16 is in verband met de factorstelling een eenvoudig geval van de staartdeling voor polynomen toegevoegd, samen met een aantal nieuwe opgaven. Substantiële uitbreidingen zijn er in de hoofdstukken 17 (goniometrie) en 18 (exponentiële functies en logaritmen). Deze hoofdstukken zijn deels herschreven om beter aan te sluiten op de voorkennis van scholieren in het voortgezet onderwijs. Ook de calculus-hoofdstukken 20, 21 en 22 hebben we nog een keer onder handen genomen. Daarbij is tevens de opgavencollectie aangevuld.

Niet alle suggesties voor wijzigingen en verbeteringen die we de afgelopen jaren ontvingen, hebben we overgenomen. Wel hebben we ze allemaal zeer serieus in overweging genomen. Maar in een klein aantal gevallen hadden we andere ideeën over wat belangrijk is voor onze doelgroep en hoe je bepaalde stukken wiskunde voor hen zou moeten presenteren.

De vraag van enige gebruikers om ook aandacht te schenken aan onderwerpen als matrixrekening en complexe getallen, hebben we niet gehonoreerd. Daaraan wordt tegemoetgekomen in het *Vervolgboek wiskunde* van de eerste auteur dat eveneens in 2009 bij Pearson is verschenen.

Veel dank!

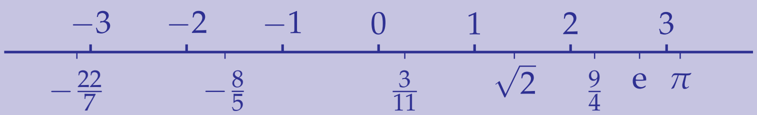
Zonder anderen tekort te willen doen, willen we in de eerste plaats Lia van Asselt, Henri Ruizenaar, Frank Arnouts, Doortje Goldbach, Abdelhak El Jazouli, Robbert van Aalst en René van Hassel bedanken. Hun commentaar heeft tot substantiële verbeteringen geleid. Ook de opmerkingen van Jan Essers, Jan Los, Wim Caspers, Adri van den Boom, C.E. van Wijk, G.J.J. Baas, Erik Beijeman, Hermien Beverdam, A. Dolfing, en Marjan van der Vegt heb-

ben we zeer op prijs gesteld. Daarnaast zijn we de gebruikers die fouten in de antwoordenlijst hebben gesignaleerd, zeer erkentelijk: Nabi Abudaldah, ing. A.S. Tigelaar, N.J. Schoonderbeek, Evert van de Vrie, Mathijs Schuts, Niël Dogger, Paul Bles, J. Bon, Max van den Aker, Evelien de Greef, Bas Bemelmans, Kevin de Berk, Veditam Bishoen, Loek Spitz en Robert van Eekhout. Een antwoordenlijst zonder fouten is ons doel; alle bijdragen die dat ideaal dichterbij brengen, zijn welkom!

We hopen dat ook de tweede editie van *Basisboek wiskunde* voor studenten en scholieren een betrouwbare gids in de wiskunde zal zijn.

Oosterhout en Breda, maart 2009,
Jan van de Craats en Rob Bosch

I Getallen



Dit deel gaat over het rekenen met getallen. Ze komen in allerlei soorten voor: positieve getallen, negatieve getallen, gehele getallen, rationale en irrationale getallen. De getallen $\sqrt{2}$, π en e zijn voorbeelden van irrationale getallen. In de hogere wiskunde wordt ook met imaginaire en complexe getallen gewerkt, maar in dit boek zullen we ons beperken tot de *reële getallen*, dat wil zeggen de getallen die je meetkundig voor kunt stellen als punten op een getallenlijn.

In de eerste twee hoofdstukken worden de rekenvaardigheden van de basisschool (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van gehele getallen en breuken) in kort bestek opgehaald. Wie hier moeite mee heeft, doet er verstandig aan om eerst ons *Basisboek rekenen* (Pearson Education, 2007) door te werken.

1 Rekenen met gehele getallen

Voer de volgende berekeningen uit:

1.1

a.
$$\begin{array}{r} 873 \\ 112 \\ 1718 \\ 157 \\ 3461 \\ \hline \ldots \end{array} +$$

b.
$$\begin{array}{r} 1578 \\ 9553 \\ 7218 \\ 212 \\ 4139 \\ \hline \ldots \end{array} +$$

1.2

a.
$$\begin{array}{r} 9134 \\ 4319 \\ \hline \ldots \end{array} -$$

b.
$$\begin{array}{r} 4585 \\ 3287 \\ \hline \ldots \end{array} -$$

c.
$$\begin{array}{r} 7033 \\ 1398 \\ \hline \ldots \end{array} -$$

1.3 Bereken:

a. 34×89
b. 67×46
c. 61×93
d. 55×11
e. 78×38

1.4 Bereken:

a. 354×83
b. 67×546
c. 461×79
d. 655×102
e. 178×398

Bereken het quotiënt en de rest met behulp van een staartdeling:

1.5

a. $154 : 13$
b. $435 : 27$
c. $631 : 23$
d. $467 : 17$
e. $780 : 37$

1.6

a. $2334 : 53$
b. $6463 : 101$
c. $7682 : 59$
d. $6178 : 451$
e. $5811 : 67$

1.7

a. $15457 : 11$
b. $4534 : 97$
c. $63321 : 23$
d. $56467 : 179$
e. $78620 : 307$

1.8

a. $42334 : 41$
b. $13467 : 101$
c. $35641 : 99$
d. $16155 : 215$
e. $92183 : 83$

Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen

De rij $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$ is de rij van de *positieve gehele getallen*. Met deze rij leert ieder kind tellen. Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van zulke getallen zonder rekenmachine leer je op de basisschool. Hiernaast staan voorbeelden.

$$
\begin{array}{r}
341\\
295\\
718\\
12\\
1431\\
\hline
2797
\end{array}\;+
\qquad
\begin{array}{r}
8135\\
3297\\
\hline
4838
\end{array}\;-
\qquad
\begin{array}{r}
431\\
728\\
\hline
3448\\
862\\
3017\\
\hline
313768
\end{array}\;\times
$$

Delen met rest

Delen zonder rekenmachine gaat met een *staartdeling*. Hiernaast zie je de staartdeling voor 83218 : 37, dat wil zeggen 83218 gedeeld door 37. Het *quotiënt* 2249 vind je rechtsboven, en de *rest* 5 onderaan de staart. De staartdeling leert dat

$$83218 = 2249 \times 37 + 5$$

We kunnen dit ook schrijven als

$$\frac{83218}{37} = 2249 + \frac{5}{37}$$

Het rechterlid wordt meestal vereenvoudigd tot $2249\frac{5}{37}$, zodat we krijgen

$$\frac{83218}{37} = 2249\frac{5}{37}$$

$$
\begin{array}{lrl}
37\;/ & 83218 & \backslash\; 2249\\
 & \underline{74} & \quad\uparrow\\
 & 92 & \text{quotiënt}\\
 & \underline{74} & \\
 & 181 & \\
 & \underline{148} & \\
 & 338 & \\
 & \underline{333} & \\
 & 5 & \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

Ontbind de volgende getallen in priemfactoren:

1.9
- a. 24
- b. 72
- c. 250
- d. 96
- e. 98

1.10
- a. 288
- b. 1024
- c. 315
- d. 396
- e. 1875

1.11
- a. 972
- b. 676
- c. 2025
- d. 1122
- e. 860

1.12
- a. 255
- b. 441
- c. 722
- d. 432
- e. 985

1.13
- a. 2000
- b. 2001
- c. 2002
- d. 2003
- e. 2004

1.14
- a. je geboortejaar
- b. je postcode
- c. je pincode

Bepaal alle delers van de volgende getallen. Werk nauwkeurig en systematisch, want als je niet goed oplet, mis je er snel een paar. Het is handig om eerst de priemontbinding van zo'n getal op te schrijven.

1.15
- a. 12
- b. 20
- c. 32
- d. 108
- e. 144

1.16
- a. 72
- b. 100
- c. 1001
- d. 561
- e. 196

Delers en priemgetallen

Soms gaat een deling op, dat wil zeggen dat de rest nul is. Zo is bijvoorbeeld $238 : 17 = 14$. Dan geldt dus $238 = 14 \times 17$. De getallen 14 en 17 heten *delers* van 238 en de schrijfwijze $238 = 14 \times 17$ heet een *ontbinding in factoren* van 238. De woorden 'deler' en 'factor' zijn in dit verband synoniemen.

Van de beide delers is 14 zelf ook weer te ontbinden, namelijk als $14 = 2 \times 7$, maar verder kan de ontbinding van 238 niet worden voortgezet, want 2, 7 en 17 zijn alle drie *priemgetallen*, dat wil zeggen getallen die niet in kleinere factoren zijn te ontbinden. Daarmee is de *ontbinding in priemfactoren* van 238 gevonden: $238 = 2 \times 7 \times 17$.

Omdat $238 = 1 \times 238$ ook een ontbinding van 238 is, zijn 1 en 238 ook delers van 238. Elk getal heeft 1 en zichzelf als deler. De interessante, *echte* delers zijn echter de delers die groter dan 1 zijn en kleiner dan het getal zelf. De priemgetallen zijn de getallen die groter dan 1 zijn en geen echte delers hebben. De rij van alle priemgetallen begint als volgt:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, \ldots$$

Elk geheel getal dat groter dan 1 is, kan ontbonden worden in priemfactoren. Hiernaast staat in voorbeelden geïllustreerd hoe je zo'n *priemontbinding* vindt door systematisch naar steeds grotere priemdelers te zoeken. Telkens als je er een vindt, deel je die uit, en ga je met het quotiënt verder.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 585 & 3 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3003 & 3 \\ 1001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Je bent klaar als je op 1 bent uitgekomen. De priemfactoren staan rechts. Uit de drie ladderdiagrammen lezen we de priemontbindingen af:

$$\begin{aligned} 180 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 &&= 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 585 &= 3 \times 3 \times 5 \times 13 &&= 3^2 \times 5 \times 13 \\ 3003 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \end{aligned}$$

Je ziet dat het handig is om priemfactoren die vaker dan één keer voorkomen, samen te nemen als een macht: $2^2 = 2 \times 2$ en $3^2 = 3 \times 3$. Nog meer voorbeelden (maak zelf de ladderdiagrammen):

$$\begin{aligned} 120 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 &&= 2^3 \times 3 \times 5 \\ 81 &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 &&= 3^4 \\ 48 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 &&= 2^4 \times 3 \end{aligned}$$

Bepaal de grootste gemene deler (ggd) van:

1.17
a. 12 en 30
b. 24 en 84
c. 27 en 45
d. 32 en 56
e. 34 en 85

1.18
a. 45 en 225
b. 144 en 216
c. 90 en 196
d. 243 en 135
e. 288 en 168

1.19
a. 1024 en 864
b. 1122 en 1815
c. 875 en 1125
d. 1960 en 6370
e. 1024 en 1152

1.20
a. 1243 en 1244
b. 1721 en 1726
c. 875 en 900
d. 1960 en 5880
e. 1024 en 2024

Bepaal het kleinste gemene veelvoud (kgv) van:

1.21
a. 12 en 30
b. 27 en 45
c. 18 en 63
d. 16 en 40
e. 33 en 121

1.22
a. 52 en 39
b. 64 en 80
c. 144 en 240
d. 169 en 130
e. 68 en 51

1.23
a. 250 en 125
b. 144 en 216
c. 520 en 390
d. 888 en 185
e. 124 en 341

1.24
a. 240 en 180
b. 276 en 414
c. 588 en 504
d. 315 en 189
e. 403 en 221

Bepaal de ggd en het kgv van:

1.25
a. 9, 12 en 30
b. 24, 30 en 36
c. 10, 15 en 35
d. 18, 27 en 63
e. 21, 24 en 27

1.26
a. 28, 35 en 49
b. 64, 80 en 112
c. 39, 52 en 130
d. 144, 168 en 252
e. 189, 252 en 315

De ggd en het kgv

Twee getallen kunnen delers gemeen hebben. De *grootste gemene deler* (ggd) is, zoals de naam al zegt, hun grootste gemeenschappelijke deler. Wanneer de ontbinding in priemfactoren van beide getallen bekend is, kan de ggd hieruit direct worden afgelezen. Zo hebben we op bladzijde 9 de volgende priemontbindingen gevonden:

$$\begin{aligned} 180 &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 585 &= 3^2 \times 5 \times 13 \\ 3003 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \end{aligned}$$

Hieruit zien we dat

$$\begin{aligned} \mathrm{ggd}(180, 585) &= \mathrm{ggd}(2^2 \times 3^2 \times 5\, ,\, 3^2 \times 5 \times 13) = 3^2 \times 5 = 45 \\ \mathrm{ggd}(180, 3003) &= \mathrm{ggd}(2^2 \times 3^2 \times 5\, ,\, 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3 \\ \mathrm{ggd}(585, 3003) &= \mathrm{ggd}(3^2 \times 5 \times 13\, ,\, 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3 \times 13 = 39 \end{aligned}$$

Het *kleinste gemene veelvoud* (kgv) van twee getallen is het kleinste getal dat zowel een veelvoud van het ene getal, als van het andere getal is. Met andere woorden, het is het kleinste getal dat door allebei die getallen deelbaar is. Ook het kgv kan uit de priemontbindingen worden afgelezen. Zo is

$$\mathrm{kgv}(180, 585) = \mathrm{kgv}(2^2 \times 3^2 \times 5\, ,\, 3^2 \times 5 \times 13) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 13 = 2340$$

Een handige eigenschap van de ggd en het kgv van twee getallen is dat hun product gelijk is aan het product van de beide getallen. Zo is

$$\mathrm{ggd}(180, 585) \times \mathrm{kgv}(180, 585) = 45 \times 2340 = 105300 = 180 \times 585$$

Ook van meer dan twee getallen kun je de ggd en het kgv direct uit hun priemontbindingen aflezen. Zo is

$$\begin{aligned} \mathrm{ggd}(180, 585, 3003) &= 3 \\ \mathrm{kgv}(180, 585, 3003) &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 180180 \end{aligned}$$

Een slim idee

Er is een methode om de ggd van twee getallen te bepalen waarbij priemontbindingen niet nodig zijn, en die vaak veel sneller werkt. Het basisidee is dat de ggd van twee getallen ook een deler moet zijn van het *verschil* van die twee getallen. Zie je ook waarom dit zo is?

Zo moet $\mathrm{ggd}(4352, 4342)$ ook een deler zijn van $4352 - 4342 = 10$. Het getal 10 heeft alleen maar de priemdelers 2 en 5. Het is duidelijk dat 5 geen deler is van de beide getallen, maar 2 wel, en dus geldt $\mathrm{ggd}(4352, 4342) = 2$. Wie slim is kan zich door dit idee te gebruiken veel rekenwerk besparen!

2 Rekenen met breuken

2.1 Vereenvoudig:

a. $\frac{15}{20}$

b. $\frac{18}{45}$

c. $\frac{21}{49}$

d. $\frac{27}{81}$

e. $\frac{24}{96}$

2.2 Vereenvoudig:

a. $\frac{60}{144}$

b. $\frac{144}{216}$

c. $\frac{135}{243}$

d. $\frac{864}{1024}$

e. $\frac{168}{288}$

2.3 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$

b. $\frac{2}{5}$ en $\frac{3}{7}$

c. $\frac{4}{9}$ en $\frac{2}{5}$

d. $\frac{7}{11}$ en $\frac{3}{4}$

e. $\frac{2}{13}$ en $\frac{5}{12}$

2.4 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{9}$

b. $\frac{3}{10}$ en $\frac{2}{15}$

c. $\frac{3}{8}$ en $\frac{5}{6}$

d. $\frac{5}{9}$ en $\frac{7}{12}$

e. $\frac{3}{20}$ en $\frac{1}{8}$

2.5 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$

b. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ en $\frac{2}{7}$

c. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{9}$

d. $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{15}$ en $\frac{5}{6}$

e. $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$ en $\frac{3}{8}$

2.6 Maak gelijknamig:

a. $\frac{2}{27}$, $\frac{5}{36}$ en $\frac{5}{24}$

b. $\frac{7}{15}$, $\frac{3}{20}$ en $\frac{5}{6}$

c. $\frac{4}{21}$, $\frac{3}{14}$ en $\frac{7}{30}$

d. $\frac{4}{63}$, $\frac{5}{42}$ en $\frac{1}{56}$

e. $\frac{5}{78}$, $\frac{5}{39}$ en $\frac{3}{65}$

Bepaal telkens welke van de volgende twee breuken de grootste is door ze eerst gelijknamig te maken.

2.7

a. $\frac{5}{18}$ en $\frac{6}{19}$

b. $\frac{7}{15}$ en $\frac{5}{12}$

c. $\frac{9}{20}$ en $\frac{11}{18}$

d. $\frac{11}{36}$ en $\frac{9}{32}$

e. $\frac{20}{63}$ en $\frac{25}{72}$

2.8

a. $\frac{4}{7}$ en $\frac{2}{3}$

b. $\frac{14}{85}$ en $\frac{7}{51}$

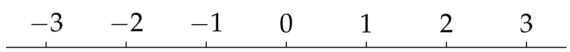
c. $\frac{26}{63}$ en $\frac{39}{84}$

d. $\frac{31}{90}$ en $\frac{23}{72}$

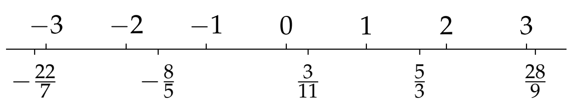
e. $\frac{37}{80}$ en $\frac{29}{60}$

Rationale getallen

De rij $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ is de rij van alle gehele getallen. Een meetkundig beeld ervan geeft de *getallenlijn* die hieronder is getekend.



Ook de *rationale getallen*, dat wil zeggen de getallen die als een breuk geschreven kunnen worden, liggen op de getallenlijn. Hieronder zijn enige rationale getallen op die lijn aangegeven.



In een breuk staan twee gehele getallen, de *teller* en de *noemer*, gescheiden door een horizontale of een schuine breukstreep. Zo is 28 de teller en 6 de noemer van de breuk $\frac{28}{6}$. De noemer van een breuk mag niet nul zijn. Een rationaal getal is een getal dat je als breuk kunt schrijven, maar die schrijfwijze ligt niet ondubbelzinnig vast: als je teller en noemer met hetzelfde gehele getal (ongelijk aan nul) vermenigvuldigt of door een gemeenschappelijke deler deelt, verandert de waarde ervan niet. Zo is

$$\frac{28}{6} = \frac{14}{3} = \frac{-14}{-3} = \frac{70}{15}$$

Breuken als $\frac{-5}{3}$ en $\frac{22}{-7}$ schrijven we meestal als $-\frac{5}{3}$, respectievelijk $-\frac{22}{7}$. Ook gehele getallen kun je als breuk schrijven, bijvoorbeeld $7 = \frac{7}{1}$, $-3 = -\frac{3}{1}$ en $0 = \frac{0}{1}$. De gehele getallen behoren dus ook tot de rationale getallen.

Delen van teller en noemer door dezelfde factor (groter dan 1) heet *vereenvoudigen*. Zo kun je $\frac{28}{6}$ vereenvoudigen tot $\frac{14}{3}$ door teller en noemer door 2 te delen. Een breuk is *onvereenvoudigbaar* als de grootste gemene deler (ggd) van teller en noemer 1 is. Zo is $\frac{14}{3}$ een onvereenvoudigbare breuk, maar $\frac{28}{6}$ niet. Je kunt van elke breuk een onvereenvoudigbare breuk maken door teller en noemer te delen door hun ggd.

Breuken heten *gelijknamig* als ze dezelfde noemer hebben. Twee breuken kun je altijd gelijknamig maken. Voorbeeld: $\frac{4}{15}$ en $\frac{5}{21}$ zijn niet gelijknamig. Je kunt ze gelijknamig maken door ze allebei als noemer $15 \times 21 = 315$ te geven: $\frac{4}{15} = \frac{84}{315}$ en $\frac{5}{21} = \frac{75}{315}$. Maar als je als gemeenschappelijke noemer het kgv van de oorspronkelijke noemers kiest, in dit geval dus $\text{kgv}(15, 21) = 105$, krijg je de eenvoudigste gelijknamige breuken, namelijk $\frac{28}{105}$ en $\frac{25}{105}$.

Bereken:

2.9

a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$

c. $\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$

d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$

e. $\frac{1}{2}+\frac{1}{15}$

2.10

a. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$

b. $\frac{3}{5}-\frac{4}{7}$

c. $\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$

d. $\frac{4}{9}-\frac{3}{8}$

e. $\frac{5}{11}+\frac{4}{15}$

2.11

a. $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{9}-\frac{2}{15}$

c. $\frac{3}{8}+\frac{1}{12}$

d. $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$

e. $\frac{4}{15}-\frac{3}{10}$

2.12

a. $\frac{2}{45}+\frac{1}{21}$

b. $\frac{5}{27}-\frac{1}{36}$

c. $\frac{5}{72}+\frac{7}{60}$

d. $\frac{3}{34}+\frac{1}{85}$

e. $\frac{7}{30}+\frac{8}{105}$

2.13

a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

b. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$

c. $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}$

d. $\frac{1}{2}-\frac{1}{7}-\frac{1}{3}$

e. $\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$

2.14

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$

c. $\frac{1}{12}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}$

d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$

e. $\frac{1}{10}-\frac{1}{15}+\frac{1}{6}$

2.15

a. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}$

c. $\frac{1}{12}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}$

d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{12}-\frac{1}{18}$

e. $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{6}$

2.16

a. $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$

b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}-\frac{2}{15}$

c. $\frac{1}{18}-\frac{7}{30}-\frac{3}{20}$

d. $\frac{3}{14}-\frac{1}{21}+\frac{5}{6}$

e. $\frac{2}{5}-\frac{3}{10}+\frac{4}{15}$

2.17

a. $\frac{2}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{10}$

b. $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$

c. $\frac{8}{21}-\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$

d. $\frac{2}{11}-\frac{5}{13}+\frac{1}{2}$

e. $\frac{4}{17}-\frac{3}{10}+\frac{2}{5}$

Optellen en aftrekken van breuken

Optellen van twee gelijknamige breuken is eenvoudig: de noemer blijft hetzelfde en de tellers worden bij elkaar opgeteld. Hetzelfde geldt voor het aftrekken van gelijknamige breuken. Voorbeelden:

$$\frac{5}{13}+\frac{12}{13}=\frac{17}{13} \qquad \text{en} \qquad \frac{5}{13}-\frac{12}{13}=\frac{-7}{13}=-\frac{7}{13}$$

Zijn de breuken niet gelijknamig, dan moet je ze eerst gelijknamig maken. Het is weer het zuinigst om als gemeenschappelijke noemer het kgv van de afzonderlijke noemers te kiezen. Voorbeelden:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5}+\frac{8}{3} &= \frac{6}{15}+\frac{40}{15} &&= \frac{46}{15}\\
-\frac{7}{12}+\frac{4}{15} &= -\frac{35}{60}+\frac{16}{60} &&= -\frac{19}{60}\\
-\frac{13}{7}-\frac{18}{5} &= -\frac{65}{35}-\frac{126}{35} &&= -\frac{191}{35}
\end{aligned}$$

Ook wanneer je meer dan twee breuken moet optellen of aftrekken, is het handig om ze eerst allemaal gelijknamig te maken. Het zuinigste is het om als noemer het kgv van de oorspronkelijke noemers te kiezen. Voorbeeld:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{10}-\frac{2}{15}=\frac{20}{30}+\frac{9}{30}-\frac{4}{30}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$$

Je ziet dat je je antwoord soms nog kunt vereenvoudigen.

Breuken en rationale getallen

Een breuk is een *schrijfwijze* van een rationaal getal. Door teller en noemer met dezelfde factor te vermenigvuldigen, verander je wel de breuk, maar niet het rationale getal dat erdoor wordt voorgesteld. Je kunt ook zeggen dat de *waarde* van de breuk niet verandert als je teller en noemer met dezelfde factor vermenigvuldigt. De breuken $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{6}$ en $\frac{50}{20}$ hebben allemaal dezelfde waarde, en op de getallenlijn hebben ze ook allemaal dezelfde plaats, namelijk halverwege 2 en 3.
In de praktijk is men overigens meestal niet zo precies: vaak wordt 'breuk' gebruikt op plaatsen waar je strikt genomen 'waarde van de breuk' zou moeten zeggen. We doen dat trouwens ook wanneer we schrijven $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$ of wanneer we zeggen dat $\frac{5}{2}$ gelijk is aan $\frac{15}{6}$.

Bereken:

2.18
a. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$
b. $\frac{4}{9} \times \frac{2}{5}$
c. $\frac{2}{13} \times \frac{5}{7}$
d. $\frac{9}{13} \times \frac{7}{2}$
e. $\frac{1}{30} \times \frac{13}{10}$

2.19
a. $\frac{2}{3} \times \frac{9}{2}$
b. $\frac{8}{9} \times \frac{3}{4}$
c. $\frac{14}{15} \times \frac{10}{7}$
d. $\frac{25}{12} \times \frac{18}{35}$
e. $\frac{36}{21} \times \frac{28}{27}$

2.20
a. $\frac{63}{40} \times \frac{16}{27}$
b. $\frac{49}{25} \times \frac{30}{21}$
c. $\frac{99}{26} \times \frac{39}{44}$
d. $\frac{51}{36} \times \frac{45}{34}$
e. $\frac{46}{57} \times \frac{38}{69}$

2.21
a. $\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{15}{4}$
b. $\frac{6}{35} \times \frac{15}{4} \times \frac{14}{9}$
c. $\frac{26}{33} \times \frac{22}{9} \times \frac{15}{39}$
d. $\frac{18}{49} \times \frac{35}{12} \times \frac{4}{21}$
e. $\frac{24}{15} \times \frac{4}{27} \times \frac{45}{16}$

2.22
a. $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$
b. $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$
c. $6 : \frac{1}{5}$
d. $\frac{6}{5} : \frac{10}{9}$
e. $\frac{4}{5} : \frac{5}{7}$

2.23
a. $\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$
b. $\frac{7}{10} : \frac{21}{15}$
c. $10 : \frac{5}{3}$
d. $\frac{12}{25} : \frac{18}{35}$
e. $\frac{24}{49} : \frac{36}{49}$

2.24
a. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$
b. $\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{9}{10}}$
c. $\dfrac{\frac{12}{7}}{\frac{9}{14}}$

2.25
a. $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}$
b. $\dfrac{\frac{5}{9} + \frac{3}{10}}{\frac{3}{4} - \frac{8}{9}}$
c. $\dfrac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}$

2.26
a. $\dfrac{\frac{2}{7} + \frac{5}{6}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{4}}$
b. $\dfrac{\frac{1}{6} - \frac{5}{3}}{\frac{2}{7} - \frac{2}{5}}$
c. $\dfrac{\frac{3}{5} - \frac{11}{12}}{\frac{6}{7} + \frac{3}{11}}$

Vermenigvuldigen en delen van breuken

Het *product* van twee breuken is de breuk die als teller het product van de tellers, en als noemer het product van de noemers heeft. Voorbeelden:

$$\frac{5}{13} \times \frac{12}{7} = \frac{5 \times 12}{13 \times 7} = \frac{60}{91} \qquad \text{en} \qquad \frac{8}{7} \times \frac{-5}{11} = \frac{8 \times (-5)}{7 \times 11} = -\frac{40}{77}$$

Voor delen van breuken geldt: *delen door een breuk is vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk.* De omgekeerde breuk krijg je door teller en noemer te verwisselen. Voorbeelden:

$$\frac{5}{13} : \frac{12}{7} = \frac{5}{13} \times \frac{7}{12} = \frac{35}{156} \qquad \text{en} \qquad \frac{8}{7} : \frac{-5}{11} = \frac{8}{7} \times \frac{11}{-5} = -\frac{88}{35}$$

Soms gebruikt men ook een andere notatie voor het delen van breuken, namelijk met de horizontale breukstreep. Voorbeeld:

$$\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{7}} \qquad \text{in plaats van} \qquad \frac{5}{13} : \frac{12}{7}$$

Er staat dan dus een 'breuk' met een breuk in de teller en een breuk in de noemer.

Andere notaties voor breuken

In plaats van een horizontale scheidingsstreep tussen teller en noemer wordt soms ook een schuine streep gebruikt: $1/2$ in plaats van $\frac{1}{2}$. Soms is het ook om typografische redenen handiger om de schuine-streepnotatie te gebruiken. De notaties worden ook wel samen gebruikt, vaak ook weer om de typografie overzichtelijker te maken, bijvoorbeeld

$$\frac{5/13}{12/7} \qquad \text{of} \qquad \frac{5}{13} \Big/ \frac{12}{7}$$

In sommige situaties kan het voordelen hebben om breuken in een *gemengde notatie* te schrijven, dat wil zeggen dat men het gehele deel ervan apart zet, bijvoorbeeld $2\frac{1}{2}$ in plaats van $\frac{5}{2}$. Bij vermenigvuldigen en delen is die notatie echter niet handig, vandaar dat we er in dit boek haast nooit gebruik van zullen maken.

3 Machten en wortels

Schrijf alle volgende uitdrukkingen als een geheel getal of als een onvereenvoudigbare breuk:

3.1
a. 2^3
b. 3^2
c. 4^5
d. 5^4
e. 2^8

3.2
a. $(-2)^3$
b. $(-3)^2$
c. $(-4)^5$
d. $(-5)^4$
e. $(-2)^6$

3.3
a. 2^{-3}
b. 4^{-2}
c. 3^{-4}
d. 7^{-1}
e. 2^{-7}

3.4
a. 2^0
b. 9^{-1}
c. 11^{-2}
d. 9^{-3}
e. 10^{-4}

3.5
a. $(-4)^3$
b. 3^{-5}
c. $(-3)^{-3}$
d. 2^4
e. $(-2)^{-4}$

3.6
a. $(-2)^0$
b. 0^2
c. 12^{-1}
d. $(-7)^2$
e. $(-2)^{-7}$

3.7
a. $(\frac{2}{3})^2$
b. $(\frac{1}{2})^4$
c. $(\frac{4}{5})^3$
d. $(\frac{2}{7})^2$

3.8
a. $(\frac{2}{3})^{-2}$
b. $(\frac{1}{2})^{-3}$
c. $(\frac{7}{9})^{-1}$
d. $(\frac{3}{2})^{-4}$

3.9
a. $(\frac{4}{3})^{-2}$
b. $(\frac{1}{2})^{-4}$
c. $(\frac{4}{5})^{-1}$
d. $(\frac{2}{3})^{-5}$

3.10
a. $(\frac{1}{4})^{-1}$
b. $(\frac{6}{5})^0$
c. $(\frac{4}{3})^3$
d. $(\frac{5}{2})^{-4}$

3.11
a. $(\frac{6}{7})^2$
b. $(\frac{8}{7})^0$
c. $(\frac{6}{7})^{-2}$
d. $(\frac{2}{7})^3$

3.12
a. $(\frac{4}{9})^3$
b. $(\frac{5}{3})^{-3}$
c. $(\frac{5}{11})^2$
d. $(\frac{3}{6})^{-5}$

Gehele machten

Voor ieder getal a ongelijk aan 0 en elk positief geheel getal k is

$$\begin{aligned} a^k &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{k \text{ maal}} \\ a^0 &= 1 \\ a^{-k} &= \frac{1}{a^k} \end{aligned}$$

Hiermee is a^n voor ieder geheel getal n gedefinieerd. Het getal a heet het *grondtal* en n heet de *exponent*. Voorbeelden:

$$\begin{aligned} 7^4 &= 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^0 &= 1 \\ \left(\frac{3}{8}\right)^{-1} &= \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3} \\ 10^{-3} &= \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

Eigenschappen:

$$\begin{aligned} a^n \times a^m &= a^{n+m} \\ a^n : a^m &= a^{n-m} \\ (a^n)^m &= a^{n \times m} \\ (a \times b)^n &= a^n \times b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \end{aligned}$$

Een bijzondere plaats neemt het grondtal 0 in. We hebben hierboven a ongelijk aan 0 genomen om te voorkomen dat er bij een negatieve gehele exponent n in de macht a^n een breuk met nul in de noemer verschijnt.

Voor positieve gehele n definieert men echter gewoon $0^n = 0$, en verder is het in de wiskunde ook gebruikelijk om $0^0 = 1$ te definiëren. Dat laatste is eenvoudig een *afspraak* die maakt dat bepaalde veel voorkomende formules ook voor 0 geldig blijven. Een voorbeeld is de formule $a^0 = 1$, die nu dus voor alle a, ook voor $a = 0$, geldt. Het blijft echter een afspraak; zoek hier verder niets diepzinnigs achter!

Schrijf alle volgende uitdrukkingen in standaardvorm, dat wil zeggen in de vorm $a\sqrt{b}$ waarin a een geheel getal en $\sqrt{b}$ een onvereenvoudigbare wortel is.

3.13
a. $\sqrt{36}$
b. $\sqrt{81}$
c. $\sqrt{121}$
d. $\sqrt{64}$
e. $\sqrt{169}$

3.14
a. $\sqrt{225}$
b. $\sqrt{16}$
c. $\sqrt{196}$
d. $\sqrt{256}$
e. $\sqrt{441}$

3.15
a. $\sqrt{8}$
b. $\sqrt{12}$
c. $\sqrt{18}$
d. $\sqrt{24}$
e. $\sqrt{50}$

3.16
a. $\sqrt{72}$
b. $\sqrt{32}$
c. $\sqrt{20}$
d. $\sqrt{98}$
e. $\sqrt{40}$

3.17
a. $\sqrt{54}$
b. $\sqrt{99}$
c. $\sqrt{80}$
d. $\sqrt{96}$
e. $\sqrt{200}$

3.18
a. $\sqrt{147}$
b. $\sqrt{242}$
c. $\sqrt{125}$
d. $\sqrt{216}$
e. $\sqrt{288}$

3.19
a. $\sqrt{675}$
b. $\sqrt{405}$
c. $\sqrt{512}$
d. $\sqrt{338}$
e. $\sqrt{588}$

3.20
a. $\sqrt{1331}$
b. $\sqrt{972}$
c. $\sqrt{2025}$
d. $\sqrt{722}$
e. $\sqrt{676}$

3.21
a. $\sqrt{6} \times \sqrt{3}$
b. $\sqrt{10} \times \sqrt{15}$
c. $2\sqrt{14} \times -3\sqrt{21}$
d. $-4\sqrt{22} \times 5\sqrt{33}$
e. $3\sqrt{30} \times 2\sqrt{42}$

3.22
a. $\sqrt{5} \times \sqrt{3}$
b. $-\sqrt{2} \times \sqrt{7}$
c. $\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}$
d. $2\sqrt{14} \times 3\sqrt{6}$
e. $3\sqrt{5} \times -2\sqrt{6} \times 4\sqrt{10}$

3.23
a. $3\sqrt{6} \times 2\sqrt{15} \times 4\sqrt{10}$
b. $-5\sqrt{5} \times 10\sqrt{10} \times 2\sqrt{2}$
c. $2\sqrt{21} \times -\sqrt{14} \times -3\sqrt{10}$
d. $\sqrt{15} \times 2\sqrt{3} \times -3\sqrt{35}$
e. $-3\sqrt{30} \times 12\sqrt{14} \times -2\sqrt{21}$

Wortels van gehele getallen

De *wortel* van een getal $a \geq 0$ is het getal w waarvoor geldt dat $w \geq 0$ en $w^2 = a$ is. Notatie: $w = \sqrt{a}$.

Voorbeeld: $\sqrt{25} = 5$ want $5^2 = 25$. Merk op dat ook $(-5)^2 = 25$, dus ook -5 zou men misschien een 'wortel van 25' willen noemen. Zoals in de definitie staat, wordt onder $\sqrt{a}$ echter uitsluitend het *niet-negatieve* getal verstaan waarvan het kwadraat gelijk is aan a, dus $\sqrt{25} = +5$.

Het getal $\sqrt{20}$ is geen geheel getal want $4^2 = 16 < 20$ en $5^2 = 25 > 20$ dus $4 < \sqrt{20} < 5$. Is $\sqrt{20}$ misschien als een breuk te schrijven? Het antwoord is nee: de wortel van een positief geheel getal dat zelf geen kwadraat van een geheel getal is, is altijd *irrationaal*, dat wil zeggen dat men zo'n getal niet als een breuk kan schrijven. Toch kan $\sqrt{20}$ wel worden vereenvoudigd, want $20 = 2^2 \times 5$ dus $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2 \times \sqrt{5}$. Die laatste uitdrukking schrijven we meestal korter als $2\sqrt{5}$.

De wortel $\sqrt{a}$ van een positief geheel getal a heet *onvereenvoudigbaar* als a geen kwadraat van een geheel getal groter dan 1 als deler heeft. Zo zijn $\sqrt{21} = \sqrt{3 \times 7}$, $\sqrt{66} = \sqrt{2 \times 3 \times 11}$ en $\sqrt{91} = \sqrt{7 \times 13}$ onvereenvoudigbare wortels, maar $\sqrt{63}$ niet, want $\sqrt{63} = \sqrt{7 \times 9} = \sqrt{7 \times 3^2} = 3\sqrt{7}$.

Elke wortel van een positief geheel getal kan geschreven worden als een geheel getal of als het product van een geheel getal en een onvereenvoudigbare wortel. Deze schrijfwijze heet de *standaardvorm* van de wortel. Je vindt de standaardvorm door alle kwadraten 'buiten de wortel te halen'. Voorbeeld: $\sqrt{200} = \sqrt{10^2 \times 2} = 10\sqrt{2}$.

Waarom $\sqrt{20}$ irrationaal is

Om aan te tonen dat $\sqrt{20}$ irrationaal is, gebruiken we een *bewijs uit het ongerijmde*: stel dat $\sqrt{20}$ rationaal was. Dan zou je die wortel kunnen schrijven als een breuk p/q waarin p en q positieve gehele getallen zijn met $\text{ggd}(p, q) = 1$. Uit $\sqrt{20} = p/q$ volgt $20q^2 = p^2$ oftewel $2 \times 2 \times 5 \times q^2 = p^2$. Het linkerlid is deelbaar door 5, dus het rechterlid ook. In de priemontbinding van p moet dan minstens één priemfactor 5 zitten, en in de priemontbinding van p^2 zitten dus minstens *twee* factoren 5. Maar $\text{ggd}(p, q) = 1$, en dus bevat de priemontbinding van q géén factoren 5. De priemontbinding van $20q^2$ bevat dus precies één factor 5, terwijl we net hebben aangetoond dat die van p^2 er minstens twee heeft. Dit is in tegenspraak met $20q^2 = p^2$. Onze veronderstelling dat $\sqrt{20}$ rationaal is, heeft dus tot een tegenspraak geleid. Conclusie: het getal $\sqrt{20}$ is irrationaal. Zo'n zelfde irrationaliteitsbewijs kan gegeven worden voor de wortel van elk positief geheel getal dat geen kwadraat is.

Schrijf alle volgende uitdrukkingen in standaardvorm, dat wil zeggen in de vorm $a\sqrt{b}$ waarin a een geheel getal of een onvereenvoudigbare breuk, en $\sqrt{b}$ een onvereenvoudigbare wortel is.

3.24

a. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

b. $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$

c. $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2$

d. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3$

e. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^3$

3.25

a. $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^3$

b. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^3$

c. $\left(\frac{-\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)^4$

d. $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3$

e. $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^5$

3.26

a. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

b. $\sqrt{\frac{3}{2}}$

c. $\sqrt{\frac{6}{5}}$

d. $\sqrt{\frac{7}{2}}$

e. $\sqrt{\frac{2}{7}}$

3.27

a. $\sqrt{\frac{5}{12}}$

b. $\sqrt{\frac{4}{27}}$

c. $\sqrt{\frac{9}{20}}$

d. $\sqrt{\frac{6}{15}}$

e. $\sqrt{\frac{7}{32}}$

3.28

a. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

b. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

c. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$

d. $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$

e. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$

3.29

a. $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

b. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$

c. $\frac{4\sqrt{12}}{\sqrt{20}}$

d. $\frac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

e. $\frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$

Wortels van breuken in standaardvorm

De wortel van een breuk met positieve teller en noemer is het quotiënt van de wortel van de teller en de wortel van de noemer. Zo is $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$. Ter controle: inderdaad is $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

De wortel van een positieve breuk kan altijd geschreven worden als een onvereenvoudigbare breuk of als het product van een onvereenvoudigbare breuk en een onvereenvoudigbare wortel. We noemen dit weer de *standaardvorm* van zo'n wortel. Voorbeelden:

$$\sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{4 \times 3}{3 \times 3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \qquad \text{en} \qquad \sqrt{\frac{11}{15}} = \sqrt{\frac{11 \times 15}{15 \times 15}} = \frac{1}{15}\sqrt{165}$$

Je bepaalt zo'n standaardvorm dus door eerst teller en noemer te vermenigvuldigen met een factor die ervoor zorgt dat de noemer een kwadraat van een geheel getal wordt, en dus kan worden getrokken. Wanneer de wortel van de teller dan nog niet in standaardvorm staat, kan die worden vereenvoudigd tot een product van een geheel getal en een onvereenvoudigbare wortel, waarmee dan de gezochte standaardvorm van de wortel van de breuk gevonden is. Op dezelfde manier kun je een wortel in de noemer van een breuk altijd wegwerken, en daarmee zo'n breuk weer in standaardvorm schrijven. Voorbeeld:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7} = \frac{2}{7}\sqrt{21}$$

Schrijf alle volgende uitdrukkingen in standaardvorm.

3.30
a. $\sqrt[3]{8}$
b. $\sqrt[4]{81}$
c. $\sqrt[3]{125}$
d. $\sqrt[5]{1024}$
e. $\sqrt[3]{216}$

3.31
a. $\sqrt[3]{-27}$
b. $\sqrt[4]{16}$
c. $\sqrt[5]{243}$
d. $\sqrt[7]{-128}$
e. $\sqrt[2]{144}$

3.32
a. $\sqrt[3]{16}$
b. $\sqrt[4]{243}$
c. $\sqrt[3]{375}$
d. $\sqrt[5]{96}$
e. $\sqrt[3]{54}$

3.33
a. $\sqrt[3]{-40}$
b. $\sqrt[4]{48}$
c. $\sqrt[5]{320}$
d. $\sqrt[3]{432}$
e. $\sqrt[6]{192}$

3.34
a. $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7}$
b. $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{14}$
c. $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{4}$
d. $\sqrt[4]{18} \times \sqrt[4]{45}$
e. $\sqrt[5]{16} \times \sqrt[5]{12}$

3.35
a. $\sqrt[4]{24} \times \sqrt[4]{54}$
b. $\sqrt[3]{36} \times \sqrt[3]{12}$
c. $\sqrt[5]{81} \times \sqrt[5]{15}$
d. $\sqrt[6]{288} \times \sqrt[6]{324}$
e. $\sqrt[3]{200} \times \sqrt[3]{35}$

3.36
a. $\sqrt[3]{\frac{1}{343}}$
b. $\sqrt[4]{\frac{-16}{81}}$
c. $\sqrt[5]{\frac{32}{-243}}$
d. $\sqrt[2]{\frac{36}{121}}$
e. $\sqrt[4]{\frac{1296}{625}}$

3.37
a. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$
b. $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$
c. $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$
d. $\sqrt[3]{\frac{216}{1000}}$
e. $\sqrt[2]{\frac{144}{25}}$

3.38
a. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$
b. $\sqrt[4]{\frac{2}{27}}$
c. $\sqrt[3]{\frac{3}{25}}$
d. $\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$
e. $\sqrt[6]{\frac{3}{8}}$

3.39
a. $\sqrt[3]{\frac{5}{24}}$
b. $\sqrt[4]{\frac{7}{72}}$
c. $\sqrt[5]{\frac{5}{648}}$
d. $\sqrt[3]{\frac{9}{100}}$

3.40
a. $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$
b. $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{8}}$
c. $\frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{16}}$
d. $\frac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{81}}$

3.41
a. $\frac{\sqrt[3]{-3}}{\sqrt[3]{2}}$
b. $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4}}$
c. $\frac{\sqrt[5]{7}}{\sqrt[5]{-27}}$
d. $\frac{\sqrt[3]{35}}{\sqrt[3]{36}}$

Hogeremachtswortels in standaardvorm

De wortels uit de vorige paragraaf worden soms ook *tweedemachtswortels* of *vierkantswortels* genoemd om ze te onderscheiden van de hogeremachtswortels die op een soortgelijke manier worden gedefinieerd.

Zo is de *derdemachtswortel* van een getal a het getal w waarvoor $w^3 = a$. Notatie: $\sqrt[3]{a}$. Voorbeelden: $\sqrt[3]{27} = 3$ want $3^3 = 27$ en $\sqrt[3]{-8} = -2$ want $(-2)^3 = -8$. Merk op dat derdemachtswortels ook uit negatieve getallen kunnen worden getrokken, en dat er geen keuzemogelijkheid voor de wortel is: er is maar één getal waarvan de derdemacht gelijk is aan 27, namelijk 3, en er is ook maar één getal waarvan de derdemacht gelijk is aan -8, namelijk -2.

In het algemeen is de n-demachtswortel $\sqrt[n]{a}$ van a het getal w waarvoor geldt dat $w^n = a$. Wanneer n even is, moet $a \geq 0$ zijn. In dat geval geldt ook $w^n = (-w)^n$, en dus zijn er dan twee mogelijke kandidaat-wortels. Bij afspraak neemt men echter altijd de *niet-negatieve* w waarvoor $w^n = a$.

Er zijn veel overeenkomsten tussen n-demachtswortels en gewone wortels, dat wil zeggen tweedemachtswortels:

- De n-demachtswortel van een geheel getal a is irrationaal tenzij a zelf een n-demacht van een geheel getal is.
- De n-demachtswortel van een positief geheel getal a heet *onvereenvoudigbaar* wanneer a geen n-demacht behalve 1 als deler heeft.
- De n-demachtswortel van een breuk kan geschreven worden als een breuk of als het product van een breuk en een onvereenvoudigbare n-demachtswortel. Dit noemen we weer de *standaardvorm* van die wortel.

Voorbeelden voor derdemachtswortels: $\sqrt[3]{24}$ is vereenvoudigbaar, want $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3}$, maar de wortels $\sqrt[3]{18}$, $\sqrt[3]{25}$ en $\sqrt[3]{450}$ zijn onvereenvoudigbaar. De standaardvorm van een derdemachtswortel van een breuk bepalen we door teller en noemer met een zodanige factor te vermenigvuldigen dat de noemer een derdemacht wordt. Voorbeeld:

$$\sqrt[3]{\frac{14}{75}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 7}{3 \times 5^2}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 7 \times 3^2 \times 5}{3^3 \times 5^3}} = \frac{1}{15}\sqrt[3]{630}$$

3.42 Schrijf als wortel:

a. $2^{\frac{1}{2}}$
b. $3^{\frac{3}{2}}$
c. $7^{\frac{2}{3}}$
d. $5^{\frac{5}{4}}$
e. $4^{\frac{4}{3}}$

3.43 Schrijf als wortel:

a. $3^{-\frac{1}{2}}$
b. $7^{-\frac{3}{2}}$
c. $4^{-\frac{1}{3}}$
d. $9^{-\frac{2}{5}}$
e. $2^{-\frac{1}{2}}$

3.44 Schrijf als macht:

a. $\sqrt[3]{5}$
b. $\sqrt[2]{7}$
c. $\sqrt[4]{2}$
d. $\sqrt[6]{12}$
e. $\sqrt[5]{5}$

3.45 Schrijf als macht:

a. $\dfrac{1}{\sqrt[2]{5}}$
b. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$
c. $\dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$
d. $\dfrac{3}{\sqrt[2]{3}}$
e. $\dfrac{7}{\sqrt[5]{7}}$

3.46 Schrijf als macht van 2:

a. $\sqrt[3]{4}$
b. $\sqrt[2]{8}$
c. $\sqrt[4]{32}$
d. $\sqrt[6]{16}$
e. $\sqrt[3]{32}$

3.47 Schrijf als macht van 2:

a. $\dfrac{4}{\sqrt[2]{2}}$
b. $\dfrac{1}{2\sqrt[2]{2}}$
c. $\dfrac{8}{\sqrt[3]{4}}$
d. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{8}}$
e. $\dfrac{1}{4\sqrt[3]{16}}$

Schrijf de volgende uitdrukkingen als wortel in standaardvorm.

3.48

a. $\sqrt[2]{2} \times \sqrt[3]{2}$
b. $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[2]{3}$
c. $\sqrt[4]{8} \times \sqrt[3]{16}$
d. $\sqrt[5]{27} \times \sqrt[3]{9}$
e. $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[6]{16}$

3.49

a. $\sqrt[2]{7} \times \sqrt[3]{49}$
b. $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[2]{3}$
c. $\sqrt[4]{25} \times \sqrt[3]{5}$
d. $\sqrt[5]{81} \times \sqrt[4]{27}$
e. $\sqrt[4]{49} \times \sqrt[2]{7}$

3.50

a. $\sqrt[2]{2} : \sqrt[3]{2}$
b. $\sqrt[3]{9} : \sqrt[2]{3}$
c. $\sqrt[4]{8} : \sqrt[2]{2}$
d. $\sqrt[3]{9} : \sqrt[5]{27}$
e. $\sqrt[2]{2} : \sqrt[3]{4}$

Gebroken machten

In deze paragraaf beperken we ons tot machten met een *positief* grondtal. Als $\frac{m}{n}$ een breuk is met $n > 1$ definiëren we

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

In het bijzonder is (neem $m = 1$)

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

dus

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a} \quad \text{enzovoort.}$$

Evenzo is (neem $m = -1$)

$$a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \quad \text{enzovoort.}$$

Verdere voorbeelden:

$$7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3} = 7\sqrt{7}, \quad 5^{-\frac{2}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{25}} \quad \text{en} \quad 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{4}$$

Het laatste voorbeeld kun je ook als volgt vinden via $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$.

$$2^{\frac{5}{3}} = 2^{1+\frac{2}{3}} = 2^1 \times 2^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

Rekenregels voor machten:

$$\begin{aligned}
a^r \times a^s &= a^{r+s} \\
a^r : a^s &= a^{r-s} \\
(a^r)^s &= a^{r \times s} \\
(a \times b)^r &= a^r \times b^r \\
\left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r}
\end{aligned}$$

Deze rekenregels zijn geldig voor alle rationale getallen r en s en alle positieve getallen a en b.

II Algebra

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

De algebra is de kunst van het rekenen met letters. Die letters stellen meestal getallen voor. In de eerste twee hoofdstukken van dit deel behandelen we de grondprincipes van de algebra: prioriteitsregels, haakjes uitwerken, termen buiten haakjes brengen, de *bananenformule* en de *merkwaardige producten*. Het laatste hoofdstuk gaat over het rekenen met breuken waarin letters voorkomen, met name over het vereenvoudigen, het onder één noemer brengen en het splitsen van zulke breuken.

4 Rekenen met letters

Bij de volgende opgaven gaat het er om de gegeven waarden in te vullen (te *substitueren*) in de gegeven algebraïsche uitdrukking en het resultaat te berekenen. Voorbeeld: als je $a = 5$ substitueert in de uitdrukking $3a^3 - 2a + 4$ krijg je $3 \times 5^3 - 2 \times 5 + 4 = 375 - 10 + 4 = 369$.

4.1 Substitueer $a = 3$ in
a. $2a^2$
b. $-a^2 + a$
c. $4a^3 - 2a$
d. $-3a^3 - 3a^2$
e. $a(2a - 3)$

4.2 Substitueer $a = -2$ in
a. $3a^2$
b. $-a^3 + a$
c. $3(a^2 - 2a)$
d. $-2a^2 + a$
e. $2a(-a + 3)$

4.3 Substitueer $a = 4$ in
a. $3a^2 - 2a$
b. $-a^3 + 2a^2$
c. $-2(a^2 - 2a)$
d. $(2a - 4)(-a + 2)$
e. $(3a - 4)^2$

4.4 Substitueer $a = -3$ in
a. $-a^2 + 2a$
b. $a^3 - 2a^2$
c. $-3(a^2 - 2a)$
d. $(2a - 1)(-3a + 2)$
e. $(2a + 1)^2$

4.5 Substitueer $a = 3$ en $b = 2$ in
a. $2a^2b$
b. $3a^2b^2 - 2ab$
c. $-3a^2b^3 + 2ab^2$
d. $2a^3b - 3ab^3$
e. $-5ab^2 - 2a^2 + 3b^3$

4.6 Substitueer $a = -2$ en $b = -3$ in
a. $3ab - a$
b. $2a^2b - 2ab$
c. $-3ab^2 + 3ab$
d. $a^2b^2 - 2a^2b + ab^2$
e. $-a^2 + b^2 + 4ab$

4.7 Substitueer $a = 5$ en $b = -2$ in
a. $3(ab)^2 - 2ab$
b. $a(a + b)^2 - (2a)^2$
c. $-3ab(a + 2b)^2$
d. $3a(a - 2b)(a^2 - 2ab)$
e. $(a^2b - 2ab^2)^2$

4.8 Substitueer $a = -2$ en $b = -1$ in
a. $-(a^2b)^3 - 2(ab^2)^2$
b. $-b(3a^2 - 2b)^2$
c. $(3a^2b - 2ab^2)(2a^2 - b^2)$
d. $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$
e. $\big((-a^2b + 2b)(ab^2 - 2a)\big)^2$

Prioriteitsregels

Letters in algebraïsche uitdrukkingen stellen in dit deel steeds getallen voor. Met die letters zijn dan ook gelijk rekenkundige bewerkingen gedefinieerd. Zo is $a + b$ de som van a en b, $a - b$ het verschil van a en b enzovoort.

Bij het vermenigvuldigen vervangen we het maalteken vaak door een punt, of we laten het helemaal weg. We schrijven dus vaak $a \cdot b$ of ab in plaats van $a \times b$. Vaak gebruiken we ook mengvormen van letters en getallen: $2ab$ betekent $2 \times a \times b$. Het is gebruikelijk om in zulke mengvormen het getal voorop te zetten, dus $2ab$ en niet $a2b$ of $ab2$.

Het is gebruikelijk om de volgende *prioriteitsregels* te hanteren:

a. Optellen en aftrekken geschieden in de volgorde waarin deze bewerkingen voorkomen, van links naar rechts.
b. Vermenigvuldigen en delen geschieden in de volgorde waarin deze bewerkingen voorkomen, van links naar rechts.
c. Vermenigvuldigen en delen hebben voorrang boven optellen en aftrekken.

We geven hieronder enige getallenvoorbeelden, waarbij we in het rechterlid eerst de volgorde van de bewerkingen met haakjes expliciet aangeven en vervolgens het antwoord berekenen.

$$\begin{array}{rcrcr} 5-7+8 & = & (5-7)+8 & = & 6 \\ 4-5\times 3 & = & 4-(5\times 3) & = & -11 \\ 9+14:7 & = & 9+(14:7) & = & 11 \\ 12:3\times 4 & = & (12:3)\times 4 & = & 16 \end{array}$$

Nu met letters. Het rechterlid geeft de uitrekenvolgorde met haakjes aan.

$$\begin{array}{lcl} a-b+c & = & (a-b)+c \\ a-bc & = & a-(b\times c) \\ a+b:c & = & a+(b:c) \\ a:b\times c & = & (a:b)\times c \end{array}$$

Let op: als je in het onderste voorbeeld het linkerlid noteert als $a : bc$ zullen velen dit opvatten als $a : (b \times c)$, en dat is echt iets anders dan $(a : b) \times c$. Neem bijvoorbeeld $a = 12$, $b = 3$ en $c = 4$, dan is $(12 : 3) \times 4 = 16$ maar $12 : (3 \times 4) = 1$. Schrijf dus niet $a : bc$ maar $a : (bc)$ wanneer je dat laatste bedoelt. Meer in het algemeen:

Gebruik haakjes in alle gevallen waarin misverstanden omtrent de volgorde van het uitvoeren van algebraïsche bewerkingen zouden kunnen ontstaan!

Vuistregel: beter te veel haakjes gebruiken dan te weinig!

Schrijf de volgende uitdrukkingen zo eenvoudig mogelijk als een macht of een product van machten.

4.9
a. $a^3 \cdot a^5$
b. $b^3 \cdot b^2$
c. $a^4 \cdot a^7$
d. $b \cdot b^3$
e. $a^7 \cdot a^7$

4.10
a. $(a^2)^3$
b. $(b^3)^4$
c. $(a^5)^5$
d. $(b^4)^2$
e. $(a^6)^9$

4.11
a. $(ab)^4$
b. $(a^2b^3)^2$
c. $(a^4b)^3$
d. $(a^2b^3)^4$
e. $(a^3b^4)^5$

4.12
a. $a^4 \cdot a^3 \cdot a$
b. $2a^5 \cdot 3a^5$
c. $4a^2 \cdot 3a^2 \cdot 5a^2$
d. $5a^3 \cdot 6a^4 \cdot 7a$
e. $a \cdot 2a^2 \cdot 3a^3$

4.13
a. $(2a^2)^3$
b. $(3a^3b^4)^4$
c. $(4a^2b^2)^2$
d. $(5a^5b^3)^3$
e. $(2ab^5)^4$

4.14
a. $3a^2b \cdot 5ab^4$
b. $6a^3b^4 \cdot 4a^6b^2$
c. $3a^2b^2 \cdot 2a^3b^3$
d. $7a^5b^3 \cdot 5a^7b^5$
e. $8a^2b^4 \cdot 3ab^2 \cdot 6a^5b^4$

4.15
a. $3a^2 \cdot -2a^3 \cdot -4a^5$
b. $-5a^3 \cdot 2a^2 \cdot -4a^3 \cdot 3a^2$
c. $4a^2 \cdot -2a^4 \cdot -5a^5$
d. $2a^4 \cdot -3a^5 \cdot -3a^6$
e. $-3a^2 \cdot -2a^4 \cdot -4a$

4.16
a. $(-2a^2)^3$
b. $(-3a^3)^2$
c. $(-5a^4)^4$
d. $(-a^2b^4)^5$
e. $(-2a^3b^5)^7$

4.17
a. $3a^2 \cdot (2a^3)^2$
b. $(-3a^3)^2 \cdot (2a^2)^3$
c. $(3a^4)^3 \cdot -5a^6$
d. $2a^2 \cdot (5a^3)^3 \cdot 3a^5$
e. $-2a^5 \cdot (-2a)^5 \cdot 5a^2$

4.18
a. $2a^3b^4(-3a^2b^3)^2$
b. $(-2a^2b^4)^3(-3a^2b^5)^2$
c. $2a^2b(-2a^2b)^2(-2a^2b)^3$
d. $3a^4b^2(-3a^2b^4)^3(-2a^3b^2)^2$
e. $(2a^3)^4(-3b^2)^2(2a^2b^3)^3$

4.19
a. $(3a^2b^3c^4)^2(2ab^2c^3)^3$
b. $(-2a^3c^4)^2(-a^2b^3)^3(2b^3c^2)^4$
c. $2a^2c^3(3a^3b^2c)^4(-5ab^2c^5)$
d. $(-2a^3c)^6(5a^3b^2)^2(-5b^3c^4)^4$
e. $-(-3a^2b^2c^2)^3(-2a^3b^3c^3)^2$

4.20
a. $\left((a^3)^4\right)^3$
b. $\left((-a^2)^3(2a^3)^2\right)^2$
c. $\left((2a^2b^3)^2(-3a^3b^2)^3\right)^2$
d. $\left(-2a(-a^3)^2\right)^5$
e. $\left(-2(-a^2)^3\right)^2\left(-3(-a^4)^2\right)^3$

Rekenen met machten

In het vorige hoofdstuk hebben we onder andere de volgende rekenregels voor machten behandeld:

$$\begin{aligned} a^n \times a^m &= a^{n+m} \\ (a^n)^m &= a^{n\times m} \\ (a \times b)^n &= a^n \times b^n \end{aligned}$$

We hebben toen alleen maar met concrete getallenvoorbeelden gerekend, maar nu kunnen we het ook met letters. In deze paragraaf zullen de exponenten wel steeds gegeven gehele getallen zijn, maar voor de grondtallen nemen we nu letters. Met de rekenregels kunnen we dan ingewikkelde algebraïsche uitdrukkingen met machten vereenvoudigen.

We geven een aantal voorbeelden. Eerst vier eenvoudige gevallen.

$$a^4 \cdot a^5 = a^{4+5} = a^9$$
$$(a^2)^4 = a^{2\times 4} = a^8$$
$$(ab)^5 = a^5 \times b^5 = a^5 b^5$$
$$(a^2b^4)^3 = (a^2)^3(b^4)^3 = a^6 b^{12}$$

Nu met getallen erbij:

$$2a^3 \cdot 5a^7 = (2 \times 5)\, a^{3+7} = 10\, a^{10}$$
$$(2a)^4 \cdot (5a)^3 = (2^4 \times 5^3)\, a^{4+3} = 2000\, a^7$$
$$(-2a)^7 = (-2)^7\, a^7 = -128\, a^7$$
$$(4a^2)^3 \cdot (-5a)^2 = 64 \cdot 25\, (a^2)^3 \cdot a^2 = 1600\, a^8$$

Maak nu alle opgaven op de tegenoverliggende bladzijde. Let daarbij ook op de mintekens, als die er zijn. Bedenk:

Een negatief getal tot een even *macht geeft een positief getal.*
Een negatief getal tot een oneven *macht geeft een negatief getal.*

Werk bij de volgende opgaven de haakjes uit.

4.21

a. $3(2a+5)$
b. $8(5a-2)$
c. $-5(3a-2)$
d. $12(-5a+1)$
e. $-7(7a+6)$

4.22

a. $2a(a-5)$
b. $7a(2a+12)$
c. $-13a(9a-5)$
d. $8a(8a-15)$
e. $-21a(3a+9)$

4.23

a. $2a(a^2+9)$
b. $3a^2(4a-7)$
c. $-5a^2(2a^2+4)$
d. $9a^2(a^2+2a)$
e. $-3a(a^2-4a)$

4.24

a. $4a^2(3a^2+2a+3)$
b. $-3a^2(2a^3+5a^2-a)$
c. $7a^3(2a^2+3a-6)$
d. $12a^2(-6a^3-2a^2+a-1)$
e. $-5a^2(3a^4+a^2-2)$

4.25

a. $2(3a+4b)$
b. $-5(2a-5b)$
c. $2a(a+2b)$
d. $16a(-4a+6b)$
e. $-22a(8a-11b)$

4.26

a. $3a(9a+5b-12)$
b. $2a^2(7a-6b)$
c. $-8a^2(7a+4b-1)$
d. $6a^2(-2a+2b+2)$
e. $-13a^2(13a+12b-14)$

4.27

a. $2a^2(3a^2+2b-3)$
b. $-5a^3(2a^2+a-2b)$
c. $2b^2(3a^2+2b^2)$
d. $4a^3(-2a^2+5b^2-2b)$
e. $-14b^3(14a^2+2a-5b^2)$

4.28

a. $2a^2(a^2+3ab)$
b. $-5a^2(3a^2+2ab-3b^2)$
c. $2a^3(3a^3+2a^2b^2-b^2)$
d. $-3a^4(2a^3+2a^2b^2+2ab^2)$
e. $7a^3(-7a^3+3a^2b-4ab^2)$

4.29

a. $2ab(a^2+2ab-b^2)$
b. $-5ab(-3a^2b+2ab^2-6b)$
c. $6ab^2(2a^2b-5ab-b^2)$
d. $-12a^2b^2(-12a^2b^2+6ab-12)$
e. $6ab^2(2a^2b+9ab-ab^2)$

4.30

a. $a^3b^2(-5a^2b^3+2a^2b^2-ab^3)$
b. $-a^2b^3(-a^3b^2-a^2b-14)$
c. $15a^4b^3(-a^3b^4-6a^2b^3+ab^4)$
d. $-a^5b^4(13a^4b^5-12a^2b^3+9ab^5)$
e. $7a^2b^2(-7a^3-7ab^2-1)$

4.31

a. $2a(a+6)-4(a+2)$
b. $-4a(3a+6)+2(a-3)$
c. $7a(-2a-1)-2a(-7a+1)$
d. $-8a(a-8)-2(-a+5)$
e. $5a(2a-5)+5(2a-1)$
f. $-2a(a+1)-(a-1)$

4.32

a. $3a(a+2b)-b(-2a+2)$
b. $-a(a-b)+b(-a+1)$
c. $2a(2a+b)-2b(-a+b)-2(a-b)$
d. $-b(-a+2b)+3(2a-b)-a(2a+b)$

Haakjes uitwerken

De *distributieve wetten* luiden:

$$\begin{aligned} a(b+c) &= ab+ac \\ (a+b)c &= ac+bc \end{aligned}$$

Ze zijn algemeen geldig, welke getallen je ook invult voor a, b en c. Voorbeelden: $15(3+8) = 15 \times 3 + 15 \times 8 = 45 + 120 = 165$, $(3-8)(-11) = 3 \times (-11) + (-8) \times (-11) = -33 + 88 = 55$.

Met de distributieve wetten kun je 'haakjes uitwerken'. Voorbeelden:

$$\begin{aligned} 5a^2(4b-2c) &= 20a^2b - 10a^2c \\ 3ab(c+2b) &= 3abc + 6ab^2 \\ (5a-2b)3c^2 &= 15ac^2 - 6bc^2 \end{aligned}$$

Let erop dat de distributieve wetten in hun meest eenvoudige, 'kale' vorm zijn geformuleerd, maar dat we bij de voorbeelden voor a, b en c allerlei algebraische uitdrukkingen hebben gesubstitueerd. Het is juist deze mogelijkheid om met formules te manipuleren die de algebra tot zo'n nuttig instrument maakt. Bedenk ook dat het maalteken in al deze voorbeelden weggelaten is. Mét maaltekens luidt het eerste voorbeeld

$$5 \times a^2 \times (4 \times b - 2 \times c) = 20 \times a^2 \times b - 10 \times a^2 \times c$$

waarmee zo'n formule weliswaar omslachtiger, maar voor de beginner wel begrijpelijker wordt.

We kunnen het bovenstaande ook toepassen in samenstellingen en combinaties. Voorbeelden:

$$\begin{aligned} &3a(4b-2c) + 2b(a-3c) = 12ab - 6ac + 2ab - 6bc = 14ab - 6ac - 6bc \\ &4a(b+c) - 5a(2b-3c) = 4ab + 4ac - 10ab + 15ac = -6ab + 19ac \\ &-2a(b-3c) - 5c(a+2b) = -2ab + 6ac - 5ac - 10bc = -2ab + ac - 10bc \end{aligned}$$

Let in de laatste twee voorbeelden vooral op de tekens. Bedenk dat bij vermenigvuldigen geldt:

Plus maal plus is plus	*Min maal plus is min*
Plus maal min is min	*Min maal min is plus*

Breng bij de volgende opgaven zo veel mogelijk factoren buiten haakjes.

4.33

a. $6a + 12$
b. $12a + 16$
c. $9a - 12$
d. $15a - 10$
e. $27a + 81$

4.34

a. $3a - 6b + 9$
b. $12a + 8b - 16$
c. $9a + 12b + 3$
d. $30a - 24b + 60$
e. $24a + 60b - 36$

4.35

a. $-6a + 9b - 15$
b. $-14a + 35b - 21$
c. $-18a - 24b - 12c$
d. $-28a - 70b + 42c$
e. $-45a + 27b - 63c - 18$

4.36

a. $a^2 + a$
b. $a^3 - a^2$
c. $a^3 - a^2 + a$
d. $a^4 + a^3 - a^2$
e. $a^6 - a^4 + a^3$

4.37

a. $3a^2 + 6a$
b. $9a^3 + 6a^2 - 3a$
c. $15a^4 - 10a^3 + 25a^2$
d. $27a^6 - 18a^4 - 36a^2$
e. $48a^4 - 24a^3 + 36a^2 + 60a$

4.38

a. $3a^2b + 6ab$
b. $9a^2b - 9ab^2$
c. $12ab^2 - 4ab$
d. $14a^2b^2 - 21ab^2$
e. $18a^2b^2 - 15a^2b$

4.39

a. $3a^3b^2 + 6a^2b$
b. $6a^4b^3 - 9a^3b^2 + 12a^2b$
c. $10a^3b^2c^2 - 5a^2bc^2 - 15abc$
d. $8a^6b^5c^4 - 12a^4b^4c^3 + 20a^3b^4c^3$
e. $a^3b^3c^3 + a^3b^3c^2 + a^3b^3c$

4.40

a. $-4a^2b^3c^2 + 2a^2b^2c^2 - 6a^2bc^2$
b. $a^6b^5c^4 - a^4b^6c^4 - a^3b^7c^3$
c. $-2a^3c^4 + 2a^2b^2c^3 - 4a^2bc^2$
d. $-a^7b^6 + a^6b^7 - a^5b^6$
e. $-a^8b^7c^6 - a^7b^6c^7 + a^6b^6c^6$

4.41

a. $a(b+3) + 3(b+3)$
b. $a(b-1) - 2(b-1)$
c. $2a(b+4) + 7(b+4)$
d. $a^2(2b-1) + 2(2b-1)$
e. $a(b-2) - (b-2)$

4.42

a. $a^2(b+1) - a(b+1)$
b. $6a(2b+1) + 12(2b+1)$
c. $-2a(b-1) + 4(b-1)$
d. $a^3(4b+3) - a^2(4b+3)$
e. $-6a^2(2b+3) - 9a(2b+3)$

4.43

a. $(a+1)(b+1) + 3(b+1)$
b. $(2a-1)(b+1) + (2a-1)(b-1)$
c. $(a+3)(2b-1) + (2a-1)(2b-1)$
d. $(a-1)(a+3) + (a+2)(a+3)$
e. $(a+1)^2 + (a+1)$

4.44

a. $2(a+3)^2 + 4(a+3)$
b. $(a+3)^2(b+1) - 2(a+3)(b+1)$
c. $(a-1)^2(a+2) - (a-1)(a+2)^2$
d. $3(a+2)^2(a-2) + 9(a+2)(a-2)^2$
e. $-2(a+4)^3 + 6(a+4)^2(a+2)$

Factoren buiten haakjes brengen

De distributieve wetten kun je ook andersom lezen:

$$\begin{aligned} ab + ac &= a(b + c) \\ ac + bc &= (a + b)c \end{aligned}$$

en ze op die manier gebruiken om een factor *buiten haakjes te brengen*. We geven weer een aantal voorbeelden. Eerst brengen we alleen maar gehele getallen buiten haakjes:

$$\begin{aligned} 3a + 12 &= 3(a + 4) \\ 27a + 45b - 9 &= 9(3a + 5b - 1) \end{aligned}$$

Maar het kan ook met letters of combinaties van letters en getallen:

$$\begin{aligned} a^4 - a &= a(a^3 - 1) \\ 15a^2b + 5ab^3 &= 5ab(3a + b^2) \end{aligned}$$

Of zelfs met hele algebraïsche uitdrukkingen:

$$\begin{aligned} (a + 1)b - 3(a + 1) &= (a + 1)(b - 3) \\ 7a^2(b^2 - 3) - 35(b^2 - 3) &= 7(a^2 - 5)(b^2 - 3) \end{aligned}$$

Werk de haakjes uit.

4.45

a. $(a+3)(a+1)$
b. $(2a+3)(a+3)$
c. $(a-6)(3a+1)$
d. $(4a-5)(5a+4)$
e. $(3a+9)(2a-5)$
f. $(6a-12)(4a+10)$

4.46

a. $(-3a+8)(8a-3)$
b. $(7a+12)(8a-11)$
c. $(17a+1)(a-17)$
d. $(-2a+6)(-3a-6)$
e. $(a+3)(b-5)$
f. $(2a+8)(3b+5)$

4.47

a. $(-4a+1)(b-1)$
b. $(3a-1)(-b+3)$
c. $(13a+12)(12b-13)$
d. $(a^2+4)(a-4)$
e. $(a-1)(a^2+7)$
f. $(a^2+3)(a^2+9)$

4.48

a. $(2a^2-7)(a+7)$
b. $(-3a^2+2)(-2a^2+3)$
c. $(a^2+2a)(2a^2-a)$
d. $(3a^2-4a)(-2a^2+5a)$
e. $(-6a^2+5)(a^2+a)$
f. $(9a^2+7a)(2a^2-7a)$

4.49

a. $(-8a^2-3a)(3a^2-8a)$
b. $(2a^3-a)(-5a^2+4)$
c. $(-a^3+a^2)(a^2+a)$
d. $(9a^4-5a^2)(6a^3+2a^2)$
e. $(7a^3-1)(8a^3-5a)$
f. $(-6a^5-5a^4)(-4a^3-3a^2)$

4.50

a. $(2ab+a)(3ab-b)$
b. $(3a^2b+ab)(2ab^2-3ab)$
c. $(-2a^2b^2+3a^2b)(2ab^2-2ab)$
d. $(8a^3b^2-6ab^3)(-4a^2b^3-2ab^2)$
e. $(-a^5b^3+a^3b^5)(a^3b^5-ab^7)$
f. $(2a+3)(a^2+2a-2)$

4.51

a. $(-3a+2)(4a^2-a+1)$
b. $(2a+b)(a+b+4)$
c. $(-3a+3b)(3a-3b-3)$
d. $(9a+2)(2a-9b+1)$
e. $(a^2+a)(a^2-a+1)$
f. $(2a^2+2a-1)(3a+2)$

4.52

a. $(-2a-1)(-a^2-3a-4)$
b. $(a-b-1)(a+b)$
c. $(a^2+ab+b^2)(a^2-b^2)$
d. $(a+1)(a+2)(a+3)$
e. $(a-1)(a+2)(a-3)$
f. $(2a+1)(a-1)(2a+3)$

4.53

a. $(2a+b)(a-b)(2a-b)$
b. $(5a-4b)(4a-3b)(3a-2b)$
c. $-3a(a^2+3)(a-2)$
d. $(-3a+1)(a+3)(-a+1)$
e. $2a^2(a^2-1)(a^2+2)$
f. $(a^2b-ab)(ab^2+ab)(a+b)$

4.54

a. $3a^2b(a^2-b^2)(2a+2b)$
b. $(a+1)(a^3+a^2-a+2)$
c. $(a^2+2a+1)(a^2-a+2)$
d. $(-2a^2+3a+1)(3a^2-2a-1)$
e. $3a(a^2+1)(a^2-2a+4)$
f. $(2a+b-5)(5a-2b+2)$

De bananenformule

Voor het product van twee sommen van twee termen geldt de formule

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

die, zoals de boogjes al aangeven, ontstaat door twee maal een distributieve wet toe te passen:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

De boogjes vormen een handig geheugensteuntje; vanwege de vorm van de boogjes wordt deze formule soms de *bananenformule* genoemd. Ook deze formule kan weer in allerlei gecompliceerdere situaties gebruikt worden. Voorbeeld:

$$(3a^2 + 7bc)(5ab - 2c) = 15a^3b - 6a^2c + 35ab^2c - 14bc^2$$

In sommige gevallen kunnen na uitwerken van de haakjes met behulp van de bananenformule nog termen worden samengenomen. Voorbeeld:

$$(5a + 3b)(2a - 7b) = 10a^2 - 35ab + 6ab - 21b^2 = 10a^2 - 29ab - 21b^2$$

Wanneer er meer dan twee termen tussen haakjes staan, gaat het uitwerken volgens hetzelfde principe als bij de bananenformule. Voorbeeld:

$$\begin{aligned}(3a+2b)(2c-d+8e) &= 3a(2c-d+8e) + 2b(2c-d+8e)\\ &= 6ac - 3ad + 24ae + 4bc - 2bd + 16be\end{aligned}$$

Producten met meer dan twee factoren werk je stap voor stap uit. Voorbeeld:

$$\begin{aligned}(3a+2b)(a-4b)(2a+c) &= (3a^2 - 12ab + 2ab - 8b^2)(2a+c)\\ &= (3a^2 - 10ab - 8b^2)(2a+c)\\ &= 6a^3 + 3a^2c - 20a^2b - 10abc - 16ab^2 - 8b^2c\end{aligned}$$

5 Merkwaardige producten

Werk de haakjes uit:

5.1
a. $(a+6)^2$
b. $(a-2)^2$
c. $(a+11)^2$
d. $(a-9)^2$
e. $(a+1)^2$

5.2
a. $(b+5)^2$
b. $(b-12)^2$
c. $(b+13)^2$
d. $(b-7)^2$
e. $(b+8)^2$

5.3
a. $(a+14)^2$
b. $(-b+5)^2$
c. $(a-15)^2$
d. $(-b-2)^2$
e. $(-a+10)^2$

5.4
a. $(2a+5)^2$
b. $(3a-6)^2$
c. $(11a+2)^2$
d. $(4a-9)^2$
e. $(13a+14)^2$

5.5
a. $(5b+2)^2$
b. $(2a-3)^2$
c. $(9b+7)^2$
d. $(4a-3)^2$
e. $(8b+1)^2$

5.6
a. $(2a+5b)^2$
b. $(3a-13b)^2$
c. $(a+2b)^2$
d. $(2a-b)^2$
e. $(6a+7b)^2$

5.7
a. $(12a-5b)^2$
b. $(-2a+b)^2$
c. $(7a-5b)^2$
d. $(-14a+3)^2$
e. $(a+11b)^2$

5.8
a. $(a^2+5)^2$
b. $(a^2-3)^2$
c. $(b^2-1)^2$
d. $(a^3+2)^2$
e. $(b^4-7)^2$

5.9
a. $(2a+7b)^2$
b. $(3a+8b)^2$
c. $(5a-9b)^2$
d. $(7a-8b)^2$
e. $(6a-11b)^2$

5.10
a. $(a^2+3)^2$
b. $(b^2-4)^2$
c. $(2a^3-13)^2$
d. $(5b^2+14)^2$
e. $(-12a^3-5)^2$

5.11
a. $(2a^2-3b)^2$
b. $(3a^2+2b)^2$
c. $(9a^2-5b^2)^2$
d. $(12a^3+2b^2)^2$
e. $(20a^2-6b^3)^2$

5.12
a. $(2a+3)^2+(a-1)^2$
b. $(a-5)^2-(a+4)^2$
c. $(3a-1)^2-(2a-3)^2$
d. $(2a+b)^2+(a+2b)^2$
e. $(-7a^2+9b^2)^2-(9a^2-7b^2)^2$

Het kwadraat van een som of een verschil

Enige bijzondere gevallen van de bananenformule worden zo vaak gebruikt dat ze een eigen naam gekregen hebben. Ze heten *merkwaardige producten*.

De eerste twee merkwaardige producten die we hier behandelen verschillen alleen in het teken. Eigenlijk zou het tweede product niet apart vermeld hoeven te worden, want het ontstaat uit het eerste door b te vervangen door $-b$. Toch is het handig om de beide gevallen paraat te hebben.

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \end{aligned}$$

Men leidt ze als volgt uit de bananenformule af:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-ab-ab+b^2 = a^2-2ab+b^2$$

Als vermakelijke, maar op zichzelf natuurlijk niet erg belangrijke toepassing berekenen we 2003^2 en 1998^2 uit het hoofd:

$$\begin{aligned} 2003^2 &= (2000+3)^2 = 2000^2+2\times 2000\times 3+3^2 \\ &= 4\,000\,000+12\,000+9 = 4\,012\,009 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} 1998^2 &= (2000-2)^2 = 2000^2-2\times 2000\times 2+2^2 \\ &= 4\,000\,000-8\,000+4 = 3\,992\,004 \end{aligned}$$

Belangrijker zijn natuurlijk de algebraïsche toepassingen, dat wil zeggen toepassingen waarbij formules in een andere vorm worden geschreven. Hier zijn enige voorbeelden:

$(a+4)^2 = a^2+8a+16$
$(a-2b)^2 = a^2-4ab+4b^2$
$(2a+3b)^2 = 4a^2+12ab+9b^2$

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren:

5.13
a. $a^2 - 16$
b. $a^2 - 1$
c. $a^2 - 144$
d. $a^2 - 81$
e. $a^2 - 121$

5.14
a. $a^2 - 36$
b. $a^2 - 4$
c. $a^2 - 169$
d. $a^2 - 256$
e. $a^2 - 1024$

5.15
a. $4a^2 - 9$
b. $9a^2 - 1$
c. $16a^2 - 25$
d. $25a^2 - 81$
e. $144a^2 - 169$

5.16
a. $36a^2 - 49$
b. $64a^2 - 121$
c. $400a^2 - 441$
d. $196a^2 - 225$
e. $144a^2 - 49$

5.17
a. $a^2 - b^2$
b. $4a^2 - 25b^2$
c. $9a^2 - b^2$
d. $16a^2 - 81b^2$
e. $196a^2 - 169b^2$

5.18
a. $a^2b^2 - 4$
b. $a^2b^2 - 625$
c. $9a^2b^2 - 25c^2$
d. $25a^2 - 16b^2c^2$
e. $100a^2b^2 - 9c^2$

5.19
a. $a^4 - b^2$
b. $25a^4 - 16b^2$
c. $16a^4 - b^4$
d. $81a^4 - 16b^4$
e. $256a^4 - 625b^4$

5.20
a. $a^4b^2 - 1$
b. $a^2b^4 - c^2$
c. $a^4 - 81b^4c^4$
d. $a^8 - b^8$
e. $256a^8 - b^8$

5.21
a. $a^3 - a$
b. $8a^2 - 50$
c. $27a^2 - 12b^2$
d. $125a^3 - 45a$
e. $600a^5 - 24a^3$

5.22
a. $3a^2b^3 - 27b$
b. $128a^3b^3 - 18ab$
c. $a^6b^3 - a^2b$
d. $-5a^3b^3c + 125abc$
e. $3a^2b - 3b$

5.23
a. $a^5 - a$
b. $2a^5 - 32a$
c. $a^5b^5 - 81ab$
d. $-a^7 + 625a$
e. $a^9b - 256ab^9$

5.24
a. $(a+3)^2 - (a+2)^2$
b. $(2a-1)^2 - (a+2)^2$
c. $(a+5)^2 - (2a+3)^2$
d. $(a+1)^2 - (3a-1)^2$
e. $(2a+1)^2 - (3a+2)^2$

Werk de haakjes uit:

5.25
a. $(a-2)(a+2)$
b. $(a+7)(a-7)$
c. $(a-3)(a+3)$
d. $(a+12)(a-12)$
e. $(a-11)(a+11)$

5.26
a. $(2a-5)(2a+5)$
b. $(3a-1)(3a+1)$
c. $(4a+3)(4a-3)$
d. $(9a-12)(9a+12)$
e. $(13a+14)(13a-14)$

Het verschil van twee kwadraten

Het volgende merkwaardige product gaat over het verschil van twee kwadraten:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ook dit product kan direct uit de bananenformule worden afgeleid:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Als vermakelijke toepassing berekenen we uit het hoofd:

$$1997 \times 2003 = 2000^2 - 3^2 = 4\,000\,000 - 9 = 3\,999\,991$$

Ook hier gaat het natuurlijk weer vooral om de algebraïsche toepassingen, dat wil zeggen toepassingen waarbij formules in een andere vorm worden geschreven. Hier zijn enige voorbeelden:

$a^2 - 25 = (a+5)(a-5)$
$4a^2b^2 - 1 = (2ab+1)(2ab-1)$
$a^6 - 9b^6 = (a^3 + 3b^3)(a^3 - 3b^3)$

In deze gevallen wordt het linkerlid, dat telkens het verschil is van twee kwadraten, *ontbonden in twee factoren*. Maar je kunt dit merkwaardige product natuurlijk ook de andere kant op gebruiken, en zo'n product van twee factoren die alleen een minteken schelen, dus schrijven als het verschil van twee kwadraten. Ook dat wordt in de dagelijkse wiskundepraktijk heel vaak gebruikt. Voorbeelden:

$(a+2b)(a-2b) = a^2 - 4b^2$
$(3a+5)(3a-5) = 9a^2 - 25$
$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = a^4 - b^4$

Op de bladzijde hiertegenover en op de volgende bladzijde staan opgaven waarmee je dit alles kunt oefenen.

Werk de haakjes uit:

5.27

a. $(6a-9)(6a+9)$
b. $(15a-1)(15a+1)$
c. $(7a-8)(7a+8)$
d. $(16a+5)(16a-5)$
e. $(21a+25)(21a-25)$

5.28

a. $(a^2-5)(a^2+5)$
b. $(a^2+9)(a^2-9)$
c. $(2a^2-3)(2a^2+3)$
d. $(6a^2-5)(6a^2+5)$
e. $(9a^2-11)(9a^2+11)$

5.29

a. $(a^3-4)(a^3+4)$
b. $(a^5+10)(a^5-10)$
c. $(9a^2+2)(9a^2-2)$
d. $(11a^4-3)(11a^4+3)$
e. $(12a^6+13)(12a^6-13)$

5.30

a. $(2a+3b)(2a-3b)$
b. $(6a-10b)(6a+10b)$
c. $(9a+2b)(9a-2b)$
d. $(7a-5b)(7a+5b)$
e. $(a-20b)(a+20b)$

5.31

a. $(a^2+b)(a^2-b)$
b. $(2a^2+3b)(2a^2-3b)$
c. $(5a^2-3b^2)(5a^2+3b^2)$
d. $(6a^2-11b^2)(6a^2+11b^2)$
e. $(13a^2+15b^2)(13a^2-15b^2)$

5.32

a. $(a^3+2b^2)(a^3-2b^2)$
b. $(2a^2+9b^3)(2a^2-9b^3)$
c. $(5a^4+3b^3)(5a^4-3b^3)$
d. $(7a^2-19b^4)(7a^2+19b^4)$
e. $(15a^5-8b^4)(15a^5+8b^4)$

5.33

a. $(2ab+c)(2ab-c)$
b. $(3a^2b+2c)(3a^2b-2c)$
c. $(5ab^2+c^2)(5ab^2-c^2)$
d. $(9a^2b^2-4c^2)(9a^2b^2+4c^2)$
e. $(18a^3b^2-7c^3)(18a^3b^2+7c^3)$

5.34

a. $(2a^2-3bc^2)(2a^2+3bc^2)$
b. $(7a^3b-8c^3)(7a^3b+8c^3)$
c. $(13a^5b^3+14c^5)(13a^5b^3-14c^5)$
d. $(5abc+1)(5abc-1)$
e. $(9a^2bc^3+7)(9a^2bc^3-7)$

Gemengde opgaven: werk steeds de haakjes uit

5.35

a. $(a+4)^2$
b. $(a+4)(a-4)$
c. $(a+4)(a+3)$
d. $4(a+3)$
e. $(a-4)(a+3)$

5.36

a. $(a-7)(a+6)$
b. $(a+7)^2$
c. $(a-6)(a+6)$
d. $(a-6)^2$
e. $(2a+6)(a-6)$

5.37

a. $(a+13)^2$
b. $(a-14)^2$
c. $(a+13)(a-14)$
d. $(a-13)(3a+13)$
e. $(13a-14)(14a+13)$

5.38

a. $(2a+8)^2$
b. $(a-8)(a-2)$
c. $2a(a-8)+a(a-2)$
d. $(2a-8)(2a+8)$
e. $(2a+4)(a+2)$

5.39

a. $(a-17)(a+4)$
b. $(a-17)^2$
c. $(a+17)(a-4)$
d. $(4a-17)(4a+17)$
e. $(4a+17)(17a-4)$

5.40

a. $(a+21)^2$
b. $(a+21)(a-12)$
c. $(21a-12)(21a+12)$
d. $(a-12)^2$
e. $(12a-21)(a+12)$

5.41

a. $(a^2-4)(a^2+2a+1)$
b. $(a-2)(a+2)(a+1)^2$
c. $((a-1)(a+1))^2$
d. $(4a^2+24a+9)(a^2-1)$
e. $(a-1)(a+1)(2a+3)^2$

5.42

a. $(a^2+2a+1)(a^2-2a+1)$
b. $(a+1)^2(a-1)^2$
c. $(a^2-1)^2$
d. $(2a+3)^2(2a-3)^2$
e. $(a+1)^4$

5.43

a. $(a^2+1)(a-1)(a+1)$
b. $2a(2a+3)(2a-3)$
c. $(a-2)(a^2+4)(a+2)$
d. $6a^2(3a^2+2)(3a^2-2)$
e. $2a(a-5)(a^2+25)(a+5)$

5.44 Bereken uit het hoofd:

a. $17 \cdot 23$
b. $45 \cdot 55$
c. $69 \cdot 71$
d. $93 \cdot 87$
e. $66 \cdot 74$

5.45

a. $(a+1)^2+(a+5)^2$
b. $(a+5)(a-5)+(a-1)^2$
c. $(a+1)(a+5)-(a-1)(a-5)$
d. $(5a+1)(a-1)+(a-5)(a+1)$
e. $(5a-1)(5a+1)-(5a-1)^2$

5.46

a. $(3a-7)(3a+7)-(3a-7)^2$
b. $3a(3a+7)-7a(3a+7)$
c. $(9a+2)^2-(a^2-2)(a^2+2)$
d. $(a^2+2)(a^2+3)-(a^2-2)^2$
e. $(a^2-1)(a^2+1)+(a^2+1)^2$

5.47

a. $(a-1)(a+1)(a+2)(a-2)$
b. $(a+5)(a-4)(a-5)(a+4)$
c. $(a^2+1)(a^2-1)(a^2+2)(a^2-2)$
d. $(a+2)(a+1)^2$
e. $(a+2)^3$

5.48

a. $2a(a+1)^2-3a(a+3)^2$
b. $-a(a+2)(a-2)+a(a+2)^2$
c. $2a(a+2)(a+3)-3a(a-2)(a-3)$
d. $5a(a-5)^2+25(a+5)(a-5)$
e. $a^2(a+3)(a-1)-(a^2+1)(a^2-3)$

6 Breuken met letters

Splits in breuken met slechts één term in de teller (zie het eerste voorbeeld op de volgende bladzijde).

6.1

a. $\dfrac{a+3}{a-3}$

b. $\dfrac{2a+3b}{a-b}$

c. $\dfrac{a^2+3a+1}{a^2-3}$

d. $\dfrac{2a-b+3}{ab-3}$

e. $\dfrac{2-5a}{b-a^3}$

6.2

a. $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

b. $\dfrac{ab+bc-ca}{a-2b}$

c. $\dfrac{b^2-1}{a^2-1}$

d. $\dfrac{4abc+5}{c-ab}$

e. $\dfrac{5ab^2-abc}{ab-c}$

Breng onder één noemer. Werk daarna in het eindresultaat alle haakjes uit.

6.3

a. $\dfrac{1}{a-3}-\dfrac{1}{a+3}$

b. $\dfrac{1}{a-3}+\dfrac{1}{a+3}$

c. $\dfrac{2}{a-3}-\dfrac{1}{a+3}$

d. $\dfrac{1}{a-3}+\dfrac{a}{a+3}$

e. $\dfrac{a}{a-3}-\dfrac{a}{a+3}$

6.4

a. $\dfrac{a+1}{a-2}-\dfrac{a-1}{a+3}$

b. $\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{a-1}{a+1}$

c. $\dfrac{a}{a+4}-\dfrac{a}{a+3}$

d. $\dfrac{3a-5}{a-1}+\dfrac{2a+3}{a-2}$

e. $\dfrac{4-a}{4+a}-\dfrac{2+a}{2-a}$

6.5

a. $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a-2b}$

b. $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}$

c. $\dfrac{2}{a-b}-\dfrac{2a}{a-2}$

d. $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{a}{2a+3b}$

e. $\dfrac{a+b}{a-3}-\dfrac{a-b}{a+3}$

6.6

a. $\dfrac{a+b}{a-c}-\dfrac{a-b}{a+c}$

b. $\dfrac{2a+1}{a-b}+\dfrac{a-2}{a+b}$

c. $\dfrac{4-a}{a+4b}-\dfrac{ab}{4a+b}$

d. $\dfrac{a-5c}{b-c}+\dfrac{2b+3}{a-b}$

e. $\dfrac{a}{4+a+b}-\dfrac{2+a}{4-a+b}$

Splitsen en onder één noemer brengen

Ook in breuken kunnen letters voorkomen. Voorbeelden:

$$\frac{a+3b}{2a-5c}, \quad \frac{b}{a^2-1}, \quad \frac{a+b}{1+a^2+b^2}$$

Het worden gewone breuken zodra je getallen voor de letters invult. Het enige waar je bij dat invullen voor op moet passen, is dat de noemer niet nul mag worden. Zo mag je in de eerste breuk bijvoorbeeld niet $a = 5$ en $c = 2$ invullen, en in de tweede breuk niet $a = 1$ of $a = -1$. In het vervolg zullen we dergelijke voorwaarden meestal niet expliciet vermelden. We gaan er dan stilzwijgend van uit dat de getalswaarden van de letters, als ze gekozen worden, buiten deze 'verboden' gebieden blijven.

Het rekenen met breuken waarin letters voorkomen, gaat in principe op dezelfde manier als het rekenen met gewone breuken. Wat veel voorkomt, is het splitsen van breuken of het onder één noemer brengen als tussenstap bij het optellen of aftrekken. We geven een paar voorbeelden. Eerst een voorbeeld van splitsen:

$$\frac{a+3b}{2a-5c} = \frac{a}{2a-5c} + \frac{3b}{2a-5c}$$

Als je voor de letters getallen invult, klopt het altijd (natuurlijk mits de noemer niet nul wordt). Neem je bijvoorbeeld $a = 4$, $b = 3$, $c = 1$, dan krijg je

$$\frac{4+3\times 3}{2\times 4-5\times 1} = \frac{4}{2\times 4-5\times 1} + \frac{3\times 3}{2\times 4-5\times 1}$$

en dat klopt want $\frac{13}{3} = \frac{4}{3} + \frac{9}{3}$. Bij de volgende voorbeelden worden de breuken eerst onder één noemer gebracht en vervolgens samengevoegd. Ook dat kun je weer aan de hand van getallenvoorbeelden controleren.

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2}{ab} - \frac{b^2}{ab} = \frac{a^2-b^2}{ab}$$

$$\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} = \frac{a+1}{(a-1)(a+1)} - \frac{a-1}{(a-1)(a+1)} = \frac{2}{a^2-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{a+3b}{2a-5} + \frac{b}{a^2-1} &= \frac{(a+3b)(a^2-1)}{(2a-5)(a^2-1)} + \frac{b(2a-5)}{(a^2-1)(2a-5)} \\ &= \frac{(a+3b)(a^2-1)+b(2a-5)}{(2a-5)(a^2-1)}\end{aligned}$$

Indien gewenst kun je in het laatste voorbeeld in de teller en de noemer van het eindresultaat nog de haakjes uitwerken.

Vereenvoudig de volgende breuken zo veel mogelijk.

6.7

a. $\dfrac{3a+18}{9b-6}$

b. $\dfrac{a^2+a}{a+1}$

c. $\dfrac{4a-2}{2a^2-a}$

d. $\dfrac{a+2b}{a^2-4b^2}$

e. $\dfrac{ab+b^3}{b^2-3b}$

6.8

a. $\dfrac{a^2b+ab^2}{3abc}$

b. $\dfrac{a^2-4a}{a+2a^2}$

c. $\dfrac{4ab-3ab^2}{a^2-abc}$

d. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$

e. $\dfrac{a^4-b^2}{a^2-b}$

Breng onder één noemer en vereenvoudig zo mogelijk.

6.9

a. $\dfrac{1}{a-3}-\dfrac{1}{a^2-9}$

b. $\dfrac{1}{a-3}-\dfrac{a}{a^2-9}$

c. $\dfrac{a^2+1}{a-3}-\dfrac{a^2-1}{a+3}$

d. $\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{a}{b-a}$

e. $\dfrac{a^2-1}{a-1}-\dfrac{a^2+1}{a+1}$

6.10

a. $\dfrac{a+b}{a-2b}-\dfrac{a-2b}{a+b}$

b. $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}+a-1$

c. $\dfrac{a}{a^2-4}-\dfrac{2}{4-a^2}$

d. $\dfrac{3a-2b}{a-b}+\dfrac{2a+3b}{3a}$

e. $\dfrac{4-a}{a}-\dfrac{4+a}{2a}$

Breuken vereenvoudigen

Net zoals bij gewone breuken, kun je ook bij breuken met letters soms vereenvoudigingen aanbrengen door teller en noemer door hetzelfde getal te delen:

$$\frac{3a+9b^2}{6a-3} = \frac{a+3b^2}{2a-1}$$

Teller en noemer zijn hier door 3 gedeeld. Ook delen door een letter is soms mogelijk:

$$\frac{7b}{b+2b^3} = \frac{7}{1+2b^2}$$

Er zit hier echter een addertje onder het gras: we hebben teller en noemer door b gedeeld, maar dat mag alleen als $b \neq 0$ is. Het linkerlid is voor $b = 0$ namelijk niet gedefinieerd (want dan staat er $\frac{0}{0}$), terwijl het rechterlid voor $b = 0$ gewoon het getal 7 als uitkomst levert. Wanneer we precies zijn, moeten we dus eigenlijk zeggen

$$\frac{7b}{b+2b^3} = \frac{7}{1+2b^2} \quad \text{als} \quad b \neq 0$$

Nog een voorbeeld:

$$\frac{a^2-4}{a-2} = \frac{(a-2)(a+2)}{a-2} = a+2 \quad \text{als} \quad a \neq 2$$

Hierin is de teller eerst via het merkwaardige product $a^2 - 4 = (a-2)(a+2)$ in twee factoren gesplitst, waarna een van beide factoren weggedeeld kon worden, met natuurlijk als voorwaarde dat die factor niet nul mag zijn, vandaar $a \neq 2$.

In het volgende voorbeeld is de voorwaarde iets ingewikkelder omdat er twee letters in voorkomen:

$$\frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = a-b \quad \text{als} \quad a+b \neq 0$$

Hierin levert de voorwaarde $a + b \neq 0$ dus oneindig veel combinaties van a en b op waarbij het linkerlid $\frac{0}{0}$ geeft en dus niet gedefinieerd is, maar het rechterlid gewoon een getalswaarde voorstelt. Neem bijvoorbeeld $a = 1$ en $b = -1$, dan is het linkerlid $\frac{0}{0}$, maar het rechterlid is 2. Of neem $a = -137$ en $b = 137$, waardoor het rechterlid -274 wordt terwijl het linkerlid weer $\frac{0}{0}$ geeft.

IV Vergelijkingen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In veel toepassingen van de wiskunde moeten vergelijkingen of ongelijkheden worden opgelost. Je moet dan alle getallen bepalen die aan een of meer gegeven vergelijkingen of ongelijkheden voldoen. In dit deel leren we de meest elementaire oplossingstechnieken. In het bijzonder geven we methodes om eerstegraadsvergelijkingen en tweedegraadsvergelijkingen op te lossen. De beroemde *abc*-formule is daarvan een belangrijk voorbeeld. In het laatste hoofdstuk behandelen we een oplossingsmethode voor eenvoudige stelsels eerstegraadsvergelijkingen.

9 Eerstegraadsvergelijkingen

Bepaal de oplossing x van elk van de volgende vergelijkingen.

9.1
a. $x+7=10$
b. $x-12=4$
c. $x+3=-10$
d. $x-10=-7$
e. $x+8=0$

9.2
a. $-x+15=6$
b. $-x-7=10$
c. $-x+17=-10$
d. $-x-8=-9$
e. $-x-19=0$

9.3
a. $2x+7=9$
b. $3x-8=7$
c. $4x+3=11$
d. $9x-10=17$
e. $6x+6=0$

9.4
a. $-3x+15=21$
b. $-2x-7=11$
c. $-5x+17=32$
d. $-4x-8=16$
e. $-6x-18=0$

9.5
a. $2x+9=12$
b. $3x-12=9$
c. $-4x+3=-11$
d. $5x-12=17$
e. $-6x+9=0$

9.6
a. $-x-15=6$
b. $-9x-7=-10$
c. $6x+17=12$
d. $-9x-18=-6$
e. $5x-19=0$

9.7
a. $x+7=10-2x$
b. $x-12=4+5x$
c. $2x+3=-10+x$
d. $3x-10=2x-7$
e. $5x+9=2x$

9.8
a. $-x+15=6-4x$
b. $-2x-7=2x-10$
c. $3x+17=-11+x$
d. $-x-8=-9x-4$
e. $2x-19=19-2x$

9.9
a. $x-12=3-4x$
b. $-3x+5=2x-8$
c. $-x+7=-12-x$
d. $4x-1=-7x+4$
e. $2x+12=9+4x$

Werk bij de volgende opgaven eerst de breuken weg door het linker- en rechterlid te vermenigvuldigen met een geschikt getal (eigenschap V2).

9.10
a. $\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=1+\frac{5}{2}x$
b. $-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}x-1$
c. $\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}=-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}x$
d. $-\frac{3}{7}x-\frac{3}{7}=-\frac{6}{7}-\frac{1}{7}x$
e. $\frac{2}{9}x-\frac{1}{9}=x-\frac{2}{9}$

9.11
a. $\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}=1+\frac{1}{6}x$
b. $-\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}=\frac{4}{3}x-1$
c. $\frac{2}{5}x+\frac{5}{3}=-\frac{5}{6}-\frac{2}{3}x$
d. $-\frac{2}{9}x-\frac{1}{4}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{6}x$
e. $\frac{1}{8}x-\frac{5}{6}=x-\frac{3}{4}$

9.12
a. $3(x+4)=-2(x+8)$
b. $-2(x-3)+1=-3(-x+7)+2$
c. $2-(x+4)=-2(x+1)-3$

9.13
a. $6(-x+2)-(x-3)=3(-x+1)$
b. $2x-(-x+1)=-3(-x+1)$
c. $5(-2x+3)+(2x-5)=4(x-4)$

Algemene oplossingsregels

Stel dat van een getal x gegeven is dat het voldoet aan de volgende vergelijking:

$$3x + 7 = -2x + 1$$

en dat gevraagd wordt x te bepalen.

Oplossing:

1. tel bij het linker- en rechterlid $2x$ op: $5x + 7 = 1$,
2. tel bij het linker- en rechterlid -7 op: $5x = -6$,
3. deel het linker- en rechterlid door 5: $x = -\dfrac{6}{5}$.

Hiermee is in drie stappen het onbekende getal x gevonden. Ter controle kun je de gevonden waarde $x = -\frac{6}{5}$ in de oorspronkelijke vergelijking substitueren en constateren dat het klopt.

We hebben gebruikgemaakt van de volgende algemene regels:

V1. *De geldigheid van een vergelijking verandert niet als je bij het linker- en rechterlid hetzelfde getal optelt.*

V2. *De geldigheid van een vergelijking verandert niet als je het linker- en rechterlid met hetzelfde getal vermenigvuldigt of door hetzelfde getal deelt, mits dat getal niet 0 is.*

De beide eerste stappen van de oplossing in het gegeven voorbeeld kun je ook zien als

het verplaatsen van een term van de ene kant van het gelijkteken naar de andere kant waarbij die term van teken wisselt (van plus naar min of omgekeerd).

Dat is de manier waarop regel V1 meestal wordt gebruikt. In stap 1 hebben we de term $-2x$ van het rechterlid naar het linkerlid overgebracht, en in stap 2 de term $+7$ van het linkerlid naar het rechterlid.

Schrijf de volgende ongelijkheden in een van de volgende gedaanten:
$x < a,\ x \leq a,\ x > a$ of $x \geq a$.

Voorbeeld: $-3x + 7 > 5$. Aftrekken van 7 geeft $-3x > -2$ en delen door -3 geeft vervolgens $x < \frac{2}{3}$.

9.14
- a. $x + 6 < 8$
- b. $x - 8 > 6$
- c. $x + 9 \leq 7$
- d. $x - 1 \geq -3$
- e. $x + 6 > 7$

9.15
- a. $-2x + 4 < 8$
- b. $-3x - 8 > 7$
- c. $-5x + 9 \leq -6$
- d. $-4x + 1 \geq -3$
- e. $-2x + 6 > 5$

9.16
- a. $2x + 6 < x - 8$
- b. $3x - 8 > 7 - 2x$
- c. $x + 9 \leq 7 - 3x$
- d. $2x - 1 \geq x - 3$
- e. $5x + 6 > 3x + 7$

9.17
- a. $-2x + 6 < x + 9$
- b. $x - 8 > 3x + 6$
- c. $2x + 9 \leq 3x + 1$
- d. $-3x - 1 \geq 3 - x$
- e. $5x + 6 > 7x + 2$

9.18
- a. $\frac{1}{2}x + 1 < 2 - \frac{1}{3}x$
- b. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} > 1 + \frac{1}{3}x$
- c. $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$
- d. $\frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$
- e. $\frac{2}{5}x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}x - \frac{2}{5}$

9.19
- a. $-\frac{3}{2}x - 1 < 2 - \frac{1}{4}x$
- b. $\frac{1}{5}x - \frac{1}{2} > 1 + \frac{2}{5}x$
- c. $-\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}$
- d. $\frac{2}{7}x - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}x - \frac{3}{7}$
- e. $-\frac{3}{5}x - \frac{5}{2} > -\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}$

Schrijf de volgende ongelijkheden in een van de volgende gedaanten:
$a < x < b,\ a \leq x < b,\ a < x \leq b$ of $a \leq x \leq b$.

Voorbeeld: $-2 \leq 3 - 6x < 4$. Aftrekken van 3 geeft $-5 \leq -6x < 1$ en delen door -6 geeft vervolgens $\frac{5}{6} \geq x > -\frac{1}{6}$ dus $-\frac{1}{6} < x \leq \frac{5}{6}$.

9.20
- a. $-3 < x + 1 < 4$
- b. $2 < 2x + 4 < 6$
- c. $0 \leq 3x + 6 < 9$
- d. $-6 < 4x - 2 \leq 4$
- e. $1 \leq 1 + 2x \leq 2$

9.21
- a. $-3 < -x + 1 < 2$
- b. $2 < 2x - 4 < 4$
- c. $0 \leq -3x + 9 < 6$
- d. $-6 < -4x + 2 \leq 4$
- e. $-1 \leq 1 - 2x \leq 0$

Ongelijkheden

Het manipuleren van ongelijkheden vergt iets meer zorg dan het manipuleren van vergelijkingen. Toch zijn er ook overeenkomsten. Ongelijkheden komen voor in vier gedaanten:

$$a < b, \qquad a \le b, \qquad a > b, \qquad a \ge b.$$

Ze betekenen respectievelijk 'a is kleiner dan b','a is kleiner dan of gelijk aan b', 'a is groter dan b' en 'a is groter dan of gelijk aan b'. Uiteraard betekent $a > b$ dus hetzelfde als $b < a$, en $a \ge b$ hetzelfde als $b \le a$. Verder geldt de volgende regel:

O1. *De geldigheid van een ongelijkheid verandert niet als je bij het linker- en rechterlid hetzelfde getal optelt.*

Deze regel heeft net als bij vergelijkingen tot gevolg dat je een term van het ene lid naar het andere lid mag overbrengen mits je daarbij het teken van die term omdraait (van plus naar min of omgekeerd).

Bij het vermenigvuldigen van het linker- en rechterlid met hetzelfde getal (ongelijk aan nul) moet je oppassen:

O2. *De geldigheid van een ongelijkheid verandert niet als je het linker- en rechterlid met hetzelfde positieve getal vermenigvuldigt of door hetzelfde positieve getal deelt.*

O3. *Als je het linker- en rechterlid van een ongelijkheid met hetzelfde negatieve getal vermenigvuldigt of door hetzelfde negatieve getal deelt, moet je het ongelijkheidsteken omklappen.*

Soms worden gelijksoortige ongelijkheden aan elkaar gekoppeld. Zo betekent $a < b \le c$ dat b groter dan a en kleiner dan of gelijk aan c is. Men combineert echter *nooit* ongelijksoortige ongelijkheden: combinaties van 'groter' en 'kleiner' in één keten komen nooit voor. Je kunt dus wel schrijven $a > b > c$ maar niet $a < b > c$, ook al zouden wel de afzonderlijke ongelijkheden $a < b$ en $b > c$ geldig zijn. De reden is dat je in dat geval wel weet dat a en c allebei kleiner dan b zijn, maar dat je hieruit over de onderlinge relatie van a en c niets kunt concluderen.

Bepaal alle oplossingen x van de volgende vergelijkingen.

9.22

a. $\dfrac{1}{x+1} = 5$

b. $\dfrac{x}{x-4} = 2$

c. $\dfrac{2x+1}{x} = -3$

d. $\dfrac{4x-1}{x-3} = -2$

e. $\dfrac{x+7}{-3x+8} = 1$

9.23

a. $\dfrac{2x}{3x-4} = -1$

b. $\dfrac{8x}{4x-4} = 2$

c. $\dfrac{4-4x}{x-1} = -3$

d. $\dfrac{2x+3}{4x} = 6$

e. $\dfrac{x-5}{x-4} = 1$

9.24

a. $(x+1)^2 = 1$

b. $(x-4)^2 = 9$

c. $(1-x)^2 = 25$

d. $(2x+1)^2 = 4$

e. $(-3x+1)^2 = 16$

9.25

a. $(x+2)^2 = 3$

b. $(x-1)^2 = 2$

c. $(3-x)^2 = 5$

d. $(2x+1)^2 = 6$

e. $(6-2x)^2 = 8$

9.26

a. $(x-1)^3 = 1$

b. $(x+4)^3 = -8$

c. $(1-x)^3 = 1$

d. $(2x-1)^3 = 27$

e. $(-4x-1)^3 = 64$

9.27

a. $(x-2)^4 = 1$

b. $(x+1)^4 = 16$

c. $(3-2x)^4 = 4$

d. $(2x+3)^4 = 81$

e. $(4-3x)^4 = 625$

9.28

a. $(x+1)^2 = (2x-1)^2$

b. $(3x-1)^2 = (x-1)^2$

c. $(x+1)^2 = (-2x+1)^2$

d. $(2x+5)^2 = (3-x)^2$

e. $(4x+3)^2 = x^2$

9.29

a. $(x+2)^2 = 4x^2$

b. $(2x+1)^2 = 4(x+1)^2$

c. $(-x+2)^2 = 9(x+2)^2$

d. $4(x+1)^2 = 25(x-1)^2$

e. $9(2x+1)^2 = 4(1-2x)^2$

Een vergelijking reduceren tot een eerstegraadsvergelijking

Een vergelijking van de vorm

$$ax + b = 0$$

waarin x een onbekend getal is en a en b gegeven (bekende) getallen zijn met $a \neq 0$, heet een *eerstegraadsvergelijking* in x. De vergelijkingen van bladzijde 52 kunnen allemaal in deze vorm worden geschreven. Zo'n vergelijking kunnen we met behulp van de regels V1 en V2 van bladzijde 73 oplossen. De oplossing is dan

$$x = -\frac{b}{a}$$

In bepaalde gevallen kun je gecompliceerdere vergelijkingen tot eerstegraadsvergelijkingen terugbrengen.

Voorbeeld 1:

$$\frac{3x+2}{4x-5} = 2$$

Door het linker- en rechterlid met $4x - 5$ te vermenigvuldigen, ontstaat de vergelijking

$$3x + 2 = 2(4x - 5)$$

die met de methode van bladzijde 73 kan worden opgelost. Het resultaat is $x = \frac{12}{5}$, zoals je zelf kunt nagaan.

We maakten bij de eerste stap dus gebruik van regel V2. Dit is slechts toegestaan als het getal $4x - 5$ waarmee we het linker- en rechterlid vermenigvuldigd hebben, ongelijk aan 0 is. Omdat we x in dit stadium van de oplossingsmethode nog niet kenden, wisten we toen ook nog niet of $4x - 5 \neq 0$ is. Dat konden we pas controleren toen we de nieuwe vergelijking naar x hadden opgelost. Zo'n *controle achteraf* is niet overbodig, zoals je kunt zien in sommige van de opgaven op de tegenoverliggende bladzijde.

Voorbeeld 2:

$$(3x - 1)^2 = 4$$

Als x voldoet, moet het kwadraat van $3x - 1$ gelijk zijn aan 4. Dat wil zeggen dat $3x - 1$ gelijk is aan $+2$ of -2. Er zijn dus twee mogelijkheden:

$$3x - 1 = 2 \quad \text{en} \quad 3x - 1 = -2$$

met als oplossingen $x = 1$ en $x = -\frac{1}{3}$ (ga dit zelf na).