Examen

Zomercursus Wiskunde B

29 juli 2019

10:00-13:00

Dit examen bestaat uit 8 opgaven.
Voor dit examen kunnen maximaal 86 punten worden behaald.
Voor iedere vraag staat hoeveel punten maximaal voor die vraag kunnen worden behaald.

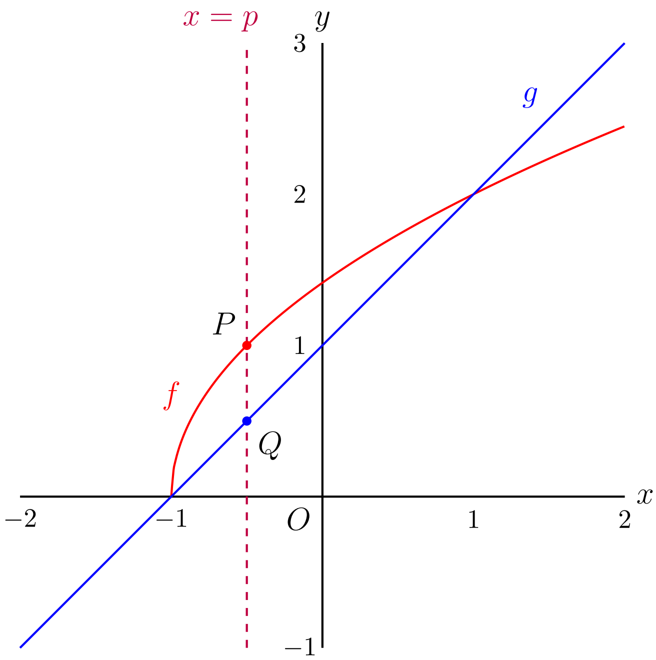
Schrijf bij iedere vraag een berekening op. Voor alleen het eindantwoord worden geen punten toegekend.

Formules

Goniometrie

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$
$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$
$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

1. Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{2x+2}$ en $g(x) = x + 1$.
In Figuur 1 zijn de grafieken van f en g getekend.



Figuur 1

3p (a) Los exact op $f(x) > g(x)$.

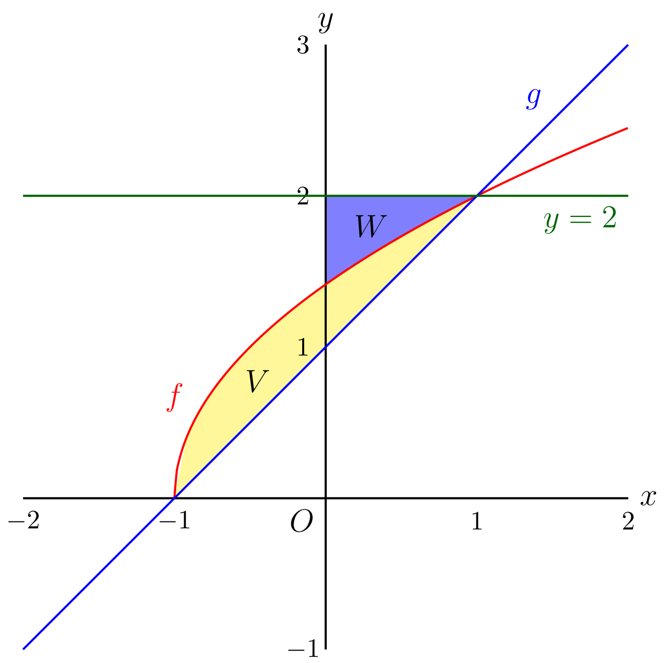
4p (b) De lijn l raakt de grafiek van f in het punt met x-coördinaat $x = -\frac{1}{2}$. Stel een vergelijking op van de raaklijn l.

Voor $-1 < p < 1$ snijdt de lijn $x = p$ de grafiek van f in het punt P en de grafiek van g in het punt Q. Er is één waarde van p waarvoor de lengte van PQ maximaal is.

5p (c) Bereken exact de maximale lengte van PQ.

LEES VERDER

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g, zie Figuur 2.



Figuur 2

4p (d) Bereken exact de oppervlakte van V.

De grafiek van f, de y-as en de lijn $y = 2$ sluiten een vlakdeel W in.

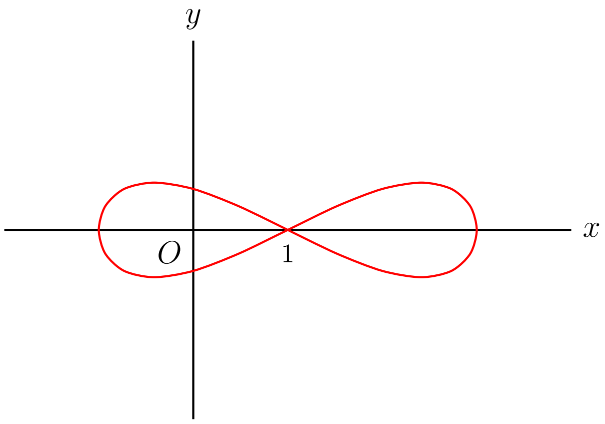
4p (e) Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als W wentelt om de x-as.

GA VERDER MET OPGAVE 2

2. De baan van het punt P wordt gegeven door de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 1 - 2\sin(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) \end{cases}$$

met $0 \leq t \leq 2\pi$. De baan van P is in Figuur 3 getekend.



Figuur 3

5p (a) Bereken exact de baansnelheid op het moment dat P voor de eerste keer de y-as passeert.

Het punt P begint en eindigt in het punt $(1, 0)$. Daartussen is er nog één tijststip waarop P het punt $(1, 0)$ passeert.

4p (b) Bereken dit tijdtip exact.

GA VERDER MET OPGAVE 3

3. Gegeven zijn de lijn k met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en de lijn l door de punten $A(-5, 6)$ en $B(7, 8)$.

3p (a) Onderzoek of de lijnen k en l loodrecht op elkaar staan.

3p (b) Stel een vectorvoorstelling op van het lijnstuk AB.

3p (c) Stel een vergelijking op van lijn k.

4. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{1-x}{3x-1} + 2$.

4p (a) Bepaal de vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f.

3p (b) Bereken de nulpunten van f.

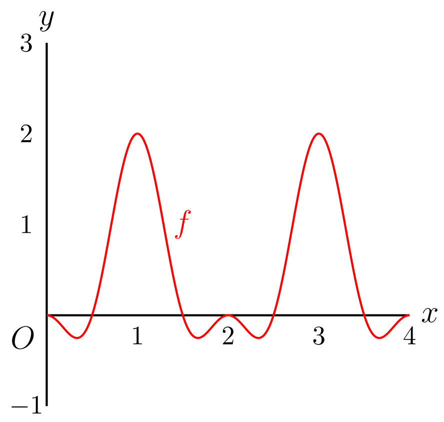
De functie f heeft geen extreme waarden en geen buigpunten.

5p (c) Toon dit aan m.b.v. differentiëren.

4p (d) Schets de grafiek van f en geef het domein en bereik van f.

GA VERDER MET OPGAVE 5

5. Gegeven is de functie $f(x) = \cos^2(\pi x) - \cos(\pi x)$ op het interval $[0, 4]$.
De grafiek van f is getekend in Figuur 4.

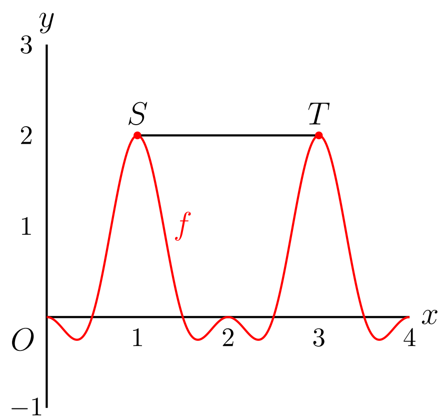


Figuur 4

Zoals te zien in Figuur 4 heeft de grafiek van f zeven nulpunten op het interval $[0, 4]$.

4p (a) Toon dit aan.

De grafiek van f heeft twee maxima met een positieve y-coördinaat op het interval $[0, 4]$. Deze maxima noemen we S en T. In Figuur 5 is de grafiek van f samen met het lijnstuk ST getekend.



Figuur 5

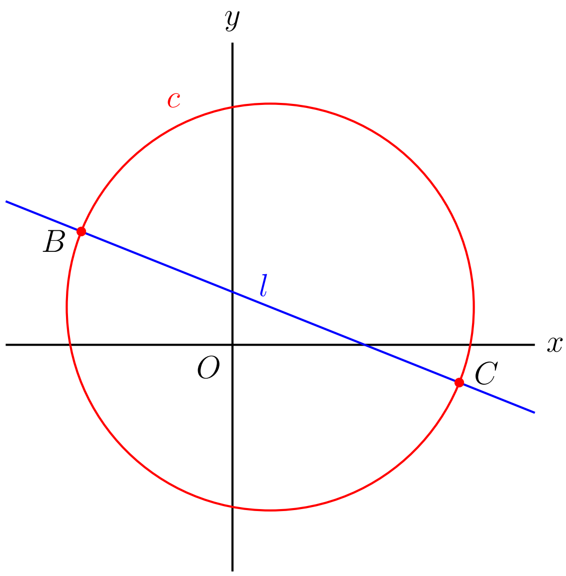
6p (b) Bewijs dat de lengte van het lijnstuk ST gelijk is aan 2.

GA VERDER MET OPGAVE 6

6. Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 27 = 0$.

3p (a) Ga met een berekening na dat de cirkel c middelpunt $M(1,1)$ en straal $\sqrt{29}$ heeft.

De lijn l: $2x + 5y = 7$ snijdt de cirkel c in de punten B en C, zie Figuur 6. De punten B en C hebben gehele coördinaten.



Figuur 6

5p (b) Bereken exact de coördinaten van B en C.

Er geldt dat lijn l de cirkel c in twee stukken met gelijke oppervlakte verdeelt.

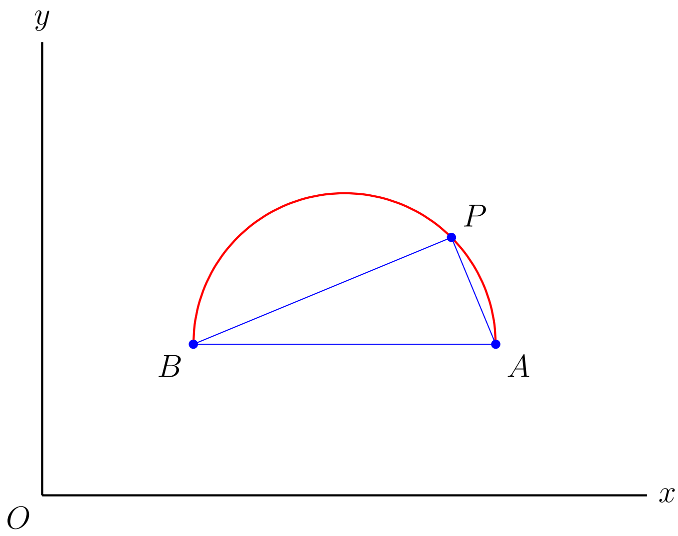
3p (c) Bewijs dit.

GA VERDER MET OPGAVE 7

7. Het punt P beweegt volgens de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 2 + \cos(t) \\ y(t) = 1 + \sin(t) \end{cases}$$

met $0 \leq t \leq \pi$. Op $t = 0$ bevindt P zich in punt A en beweegt over een halve cirkel naar punt B. Op $t = \pi$ bevindt P zich in punt B. Voor $0 < t < \pi$ zijn de punten A, P en B de hoekpunten van een driehoek, zie Figuur 7.



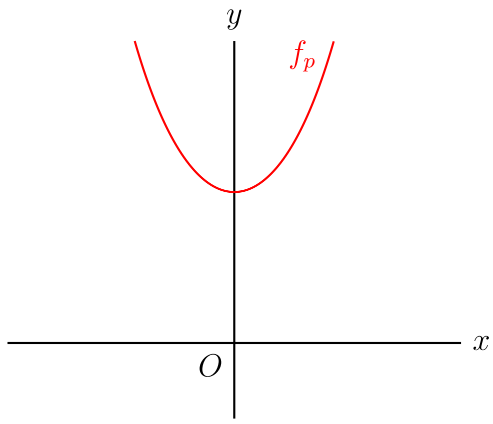
Figuur 7

Voor $0 < t < \pi$ geldt dat driehoek APB een rechthoekige driehoek is met een rechte hoek bij P.

4p Bewijs dit.

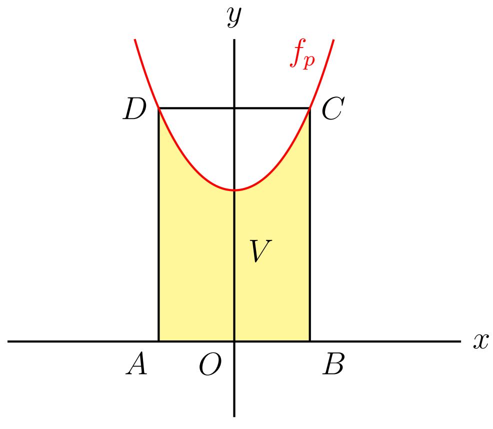
DE LAATSTE VRAAG VAN DIT EXAMEN STAAT OP DE VOLGENDE BLADZIJDE

8. Voor iedere $p > 0$ wordt een functie f_p gedefinieerd door $f_p(x) = e^{px} + e^{-px}$.
De grafiek van f_p is in Figuur 8 voor een zekere waarde van p getekend.



Figuur 8

Op de x-as liggen de punten A en B met $x_A = -\dfrac{1}{p}$ en $x_B = \dfrac{1}{p}$.
Op de grafiek van f_p liggen de punten C en D met $x_C = x_B$ en $x_D = x_A$.
Omdat de grafiek van f_p symmetrisch is, geldt dat $y_C = y_D$ en dus is $ABCD$ een rechthoek.
Verder sluiten de grafiek van f_p en de lijnstukken AB, BC en AD een vlakdeel V in.
In Figuur 9 zijn de grafiek van f_p, de rechthoek $ABCD$ en het vlakdeel V getekend.



Figuur 9

7p Bewijs dat de verhouding van de oppervlakte van V en de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ onafhankelijk is van p.

EINDE