UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM — Voorbeeld Toets Wiskunde A
FNWI

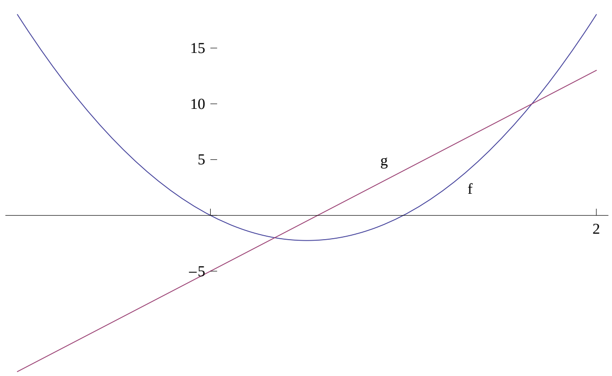
Het is niet toegestaan om een formulekaart of rekenmachine te gebruiken.

---

1. De twee functies f en g worden gegeven door

$$f(x) = 9x(x-1) \quad \text{en} \quad g(x) = 9x - 5.$$

In Figuur 1 zijn de grafieken van f en g getekend.



Figuur 1: De grafieken van de functies f en g.

(a) Los de ongelijkheid $f(x) \leq g(x)$ exact op.

(b) Bepaal exact het x-coördinaat van het minimum van de functie f.

(c) Voor welke x in $[\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$ is de verticale afstand tussen f en g maximaal?

(a) Los eerst de vergelijking $f(x) = g(x)$ op:

$$f(x) = g(x) \implies 9x(x-1) = 9x - 5 \implies 9x^2 - 18x + 5 = 0$$

$$\implies (3x)^2 - 6(3x) + 5 = 0 \implies (3x-1)(3x-5) = 0$$

Dus:

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{of } x = \frac{5}{3}$$

Dus:

$$f(x) \leq g(x) \implies \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$$

(b) $f'(x) = 18x - 9$ en dus minimum bij $x = \frac{1}{2}$ Verder $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4}$

(c) Definieer $h(x) = g(x) - f(x) = 9x - 5 - 9x(x-1) = -9x^2 + 18x - 5$ dan $h'(x) = -18x + 18 = 0 \implies x = 1$. Maximale verticale afstand bij $x = 1$

2. Stel dat bij blaasontsteking het aantal ecoliebacteriën verdubbelt in 20 minuten en dat bij een persoon op het tijdstip $t = 0$ een aantal van 500 bacteriën zich in de urinewegen bevond. Het aantal bacteriën dat hij of zij na t uur bij zich draagt noteren we als $N(t)$. Er geldt:

$$N(t) = 500 \cdot g^t$$

Hierbij is g de groeifactor *per uur*.

(a) Bepaal de waarde van g.

(b) De infectie wordt pas door de drager opgemerkt als hij of zij 10^8 bacteriën bij zich heeft. Na hoeveel hele uren is dit het geval?

(c) Een medicijn wordt gebruikt zodat de bacteriekolonie elk uur met 66% afneemt. $M(t)$ is het aantal bacteriën t uur na het eerste gebruik van het medicijn en de beginhoeveelheid is 10^8. Wat is de formule voor $M(t)$?

(a) Er passen in één uur passen 3 verdubbelingsperioden. Dus $g = 8$

(b) Je zoekt het kleinste hele getal t zodanig dat $N(t) = 500 \cdot 8^t \geq 10^8$ Los eerste de gelijkheid $500 \cdot 8^t = 10^8$ exact op; hiertoe nemen we links en rechts de logartimen met grondtal 10:

$$\log(500) + t \cdot \log(8) = 8 \implies \log(5) + t \log(8) = 6$$

$$\implies t = \frac{6 - \log(5)}{\log(8)} \approx 5.87$$

Dus na zes uur merkt de drager de infectie op

(c) De groeifactor is in dit geval $(100 - 66)/100 = 0.34$ en dus

$$M(t) = 10^8 \cdot 0.34^t$$

3. Hieronder zijn twee functies gegeven. Bepaal exact de *nulpunten*, de *minima* en *maxima* van deze functies. Bepaal ook voor welke waarden van x de functies gedefinieerd zijn, het zogenaamde *domein*, en welke waarden ze kunnen aannemen, het zogenaamde *bereik*.

   (a)
   $$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

   (b)
   $$g(x) = \frac{x-2}{x+1} + 1$$

   (a) nulpunt: $f(x) = x(x-1)^2 = 0 \implies x = 0$ of $x = 1$.
   $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1)$ en
   $f'(x) = 0 \implies x = \frac{1}{3}$ of $x = 1$.
   maximum bij $x = \frac{1}{3}$ en $f(\frac{1}{3}) = \frac{4}{27}$.
   minumum bij $x = 1$ en $f(1) = 0$.
   Domein: reële getallen; Bereik: alle reële getallen.

   (b) Dit is een gebroken functie met formule $g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. Dus: nulpunt: $x = \frac{1}{2}$.
   Er zijn geen lokale maxima of minima. Domein: reële getallen behalve -1; Bereik: alle reële getallen behalve 2.

4. Los exact op:

   (a)
   $$^3\log(x-1) = 2$$

   (b)
   $$x \cdot e^{-x} = -e^{x+1}$$

(c)

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$

(a)

$$^3\log(x-1) = 2 \implies {}^3\log(x-1) = {}^3\log(9) \implies x-1 = 9 \implies x = 10$$

(b)

$$x \cdot e^{-x} = -e^{x+1} \implies (x+e)e^{-x} = 0 \implies x = -e$$

(c)

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \implies (x-3)(x+1) > 0 \implies x < -1 \text{ of } x > 3$$

5. Bereken de volgende afgeleiden.

   (a)

   $$\left[x\ln(1+x^2)\right]'$$

   (b)

   $$\left[\frac{x}{x-1}\right]'$$

   (a) Als $f(x) = x\ln(1+x^2)$ dan $f'(x) = \ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}$

   (b) Als $f(x) = \frac{x}{x-1}$ dan $f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(1-x)^2}$

6. Bereken exact de som $\displaystyle\sum_{k=-5}^{10} 2 \cdot 3^k$.

   Dit is een meetkundige rij. Nu loopt k niet vanaf 0 maar vanaf -5, dus noem $b = k+5$ (dan $k = b-5$). De som loopt dan vanaf $b = 0$ t/m $b = -1+5 = 4$. Dan wordt de som: $\displaystyle\sum_{k=-5}^{10} 2 \cdot 3^k = \sum_{b=0}^{4} 2 \cdot 3^{b-5} = \sum_{b=0}^{4} 2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^b = \sum_{b=0}^{4} \frac{2}{243} \cdot 3^b$.

   Nu hebben we een meetkundige rij beginnende op $b = 0$, met $a_0 = \frac{2}{243}$

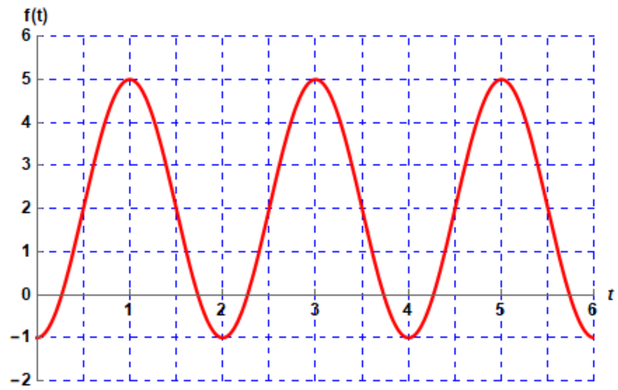
, $r = 3$ en $n = 15$. Dit invullen in de somformule:

$$\sum_{k=-5}^{10} 2 \cdot 3^k = \sum_{b=0}^{4} \frac{2}{243} \cdot 3^b = \frac{\frac{2}{243}\left(1 - 3^5\right)}{1 - 3}$$
$$= \frac{\frac{2}{243}(1 - 243)}{-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{243} + \frac{1}{2} \cdot 2 = -\frac{1}{243} + 1 = \frac{242}{243}.$$

7. Bereken exact de som $\sum_{k=-3}^{14} (-k + 4)$.
   Hierbij gaat het om een rekenkundige rij. Nu begint k niet op 1 maar op -3. Noem $b = k + 4$ (dan $k = b - 4$). De som loopt dan vanaf $b = 1$ t/m $b = 18$. Dan wordt de som:
   $$\sum_{k=-3}^{14} (-k + 4) = \sum_{b=1}^{18} (-(b - 4) + 4) = \sum_{b=1} (-b + 8)$$
   Nu hebben we een rekenkundige rij beginnende op $b = 1$, met $a_1 = -1 + 8 = 7$ en $a_n = a_{18} = -18 + 8 = -10$. Dit vullen we in in de somformule:
   $$\sum_{k=-3}^{14} (-k + 4) = \sum_{b=1}^{18} (-b + 8) = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot (7 + -10) = 9 \cdot -3 = -27$$

8. Gegeven $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, wat is dan $\sin(\alpha)$?
   De cosinuswaarde is positief. Deze waarde is $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dit kan bij een hoek van $\frac{\pi}{4}$ radialen en $-\frac{\pi}{4}$ radialen (of ook wel $\frac{7\pi}{4}$ radialen). Dus $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

9. Stel een functievoorschrift $f(t)$ op van de sinusode die hoort bij onderstaande grafiek. De algemene formule voor een sinusode is
   $f(t) = B + A\sin(2\pi f + \phi)$.
   De grafiek loopt van -1 t/m 5, de evenwichtswaarde zit dus bij $B = 2$. De amplitude van de grafiek is $A = 3$. De eerste top zit bij $t = 1$ en de tweede top zit bij $t = 3$. De periode is dus $T = 2$. Dus de frequentie is $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$. De factor $2\pi f$ wordt dus $2\pi f = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$. De fasehoek ϕ



Figuur 2: De grafiek van de gevraagde sinusode.

halen we uit een startpunt. Een startpunt is daar waar de functie stijgt en door de evenwichtswaarde B gaat. Dit is bijvoorbeeld het geval bij $t = \frac{1}{2}$. Dus $-\frac{\phi T}{2\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{2\phi}{2\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\phi}{\pi} = \frac{1}{2}$ dus $\phi = -\frac{\pi}{2}$. De formule wordt dus:

$$f(t) = 2 + 3\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right).$$

10. Je hebt een willekeurig getal uit 1, 2, ..., 6 gekozen en een medespeler gooit vervolgens 3 keer met een eerlijke dobbelsteen.

    (a) Bereken de kans dat geen enkele keer het eerder gekozen getal gegooid wordt met de dobbelsteen

    (b) Bereken de kans dat precies één keer het eerder gekozen getal verschijnt op de geworpen dobbelsteen.

    (c) Als het gekozen getal geen enkele keer verschijnt op de geworpen dobbelsteen, dan moet je jouw medespeler 10 euro betalen. Verschijnt het gekozen getal één, twee, of drie keer, dan betaalt de medespeler jou 10, 20, of 30 euro. Hoe lonend is het spel voor jouw medespeler, d.w.z. wat is zijn of haar gemiddelde winst?

    (a)

$$P[\text{het gekozen getal verschijnt niet}] = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

(b)

$$P[\text{het gekozen getal verschijnt 1 keer}] = \binom{3}{1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{12} = \frac{75}{216}$$

(c)

$$P[\text{het gekozen getal verschijnt 2 keer}] = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

$$P[\text{het gekozen getal verschijnt 3 keer}] = \frac{1}{216}$$

De gemiddelde winst voor jouw medespeler is

$$10 \times \frac{125}{216} - 10 \times \frac{75}{216} - 20 \times \frac{15}{216} - 30 \times \frac{1}{216} = 10 \times \frac{17}{216} \approx 79 \text{ cent}$$

11. In een grote doos liggen vijf identieke schoenenparen kriskas door elkaar heen. Iemand pakt zonder te kijken vier schoenen uit de doos. Wat is de kans dat onder de vier schoenen een linker- en rechterschoen is?

$$\begin{aligned} P[\text{kans op minstens 1 paar}] &= 1 - P[\text{kans op 4 linkerschoenen}] \\ &\quad - P[\text{kans op 4 rechterschoenen}] \\ &= 1 - 2 \times P[\text{kans op 4 linkerschoenen}] \\ &= 1 - 2 \times \frac{\binom{5}{4}}{\binom{10}{4}} \\ &= 1 - 2 \times \frac{5}{210} = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21} \end{aligned}$$

12. Gebruik in deze opgave bijgevoegde tabel van de cumulatieve standaardnormale verdeling.

Veronderstel dat de systolische bloeddruk X (in mmHg) in gezonde mensen normaal verdeeld is met gemiddelde druk van 120 mmHg en standaardafwijking 10 mmHg. Wat is de kans dat een aselect gekozen gezond persoon een systolische druk groter dan 140 mmHg heeft.

$$
\begin{aligned}
P[X > 140] &= 1 - P[X \leq 140] \\
&= 1 - \Phi(\frac{140 - 120}{10}) \\
&= 1 - \Phi(2) \\
&= 1 - 0.9772 \\
&= 0.0228
\end{aligned}
$$